



Politechnika Wrocławska

Wydział Mechaniczno-Energetyczny

Ćwiczenie L3

PROFIL PRĘDKOŚCI W PRZEWODZIE PROSTOOSIOWYM

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie rozkładu prędkości w przewodzie prostoosiowym i porównanie go z rozkładem otrzymanym z modelu matematycznego.

2. Wstęp teoretyczny

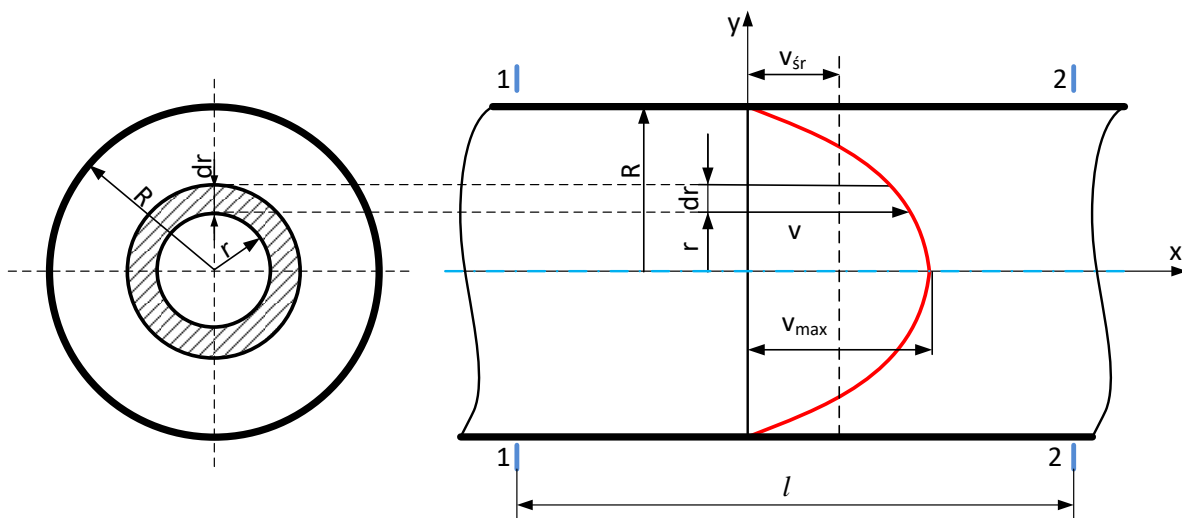
Profil prędkości jest to funkcja przedstawiająca zależność prędkości przepływu dla różnych w różnych odległościach od osi przewodu. Kształt profilu prędkości przepływu płynu zależy od rodzaju przepływu czyli tego czy ruch jest laminarny czy turbulentny.

2.1. Profil prędkości w przepływie laminarnym

W przewodzie o prostoosiowym o przekroju kołowym wybieramy dwa przekroje poprzeczne oddalone od siebie o odległość l (rys. 1). Pomiędzy wybranymi przekrojami występuje różnica ciśnień Δp powodująca przepływ. W stanie ustalonym siła ciśnieniowa wywołana różnicą ciśnień Δp jest równoważona przez siłę tarcia wewnętrznego. Warunek równowagi sił przedstawia równanie

$$F_{p1} - F_{p2} - F_t = 0, \quad (1)$$

gdzie: F_{p1} , F_{p2} – siły ciśnieniowe w przekroju 1 i 2, F_t – siła tarcia wewnętrznego.



Rys. 1. Profil prędkości w przewodzie w ruchu laminarnym.

Siły ciśnieniowe zastąpienie zostaną zgodnie z definicją ciśnienia iloczynem ciśnienia i pola powierzchni, natomiast siła tarcia wewnętrznego obliczona zostanie ze wzoru Newtona

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy}, \quad (2)$$

gdzie: τ – naprężenie styczne, μ – dynamiczny współczynnik lepkości, $\frac{dv}{dy}$ – szybkość ścinania (pochodna prędkości w kierunku normalnym do kierunku przepływu).

Wzór (1) ma wówczas postać

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 - \tau S = 0. \quad (3)$$

Dla przewodu o przekroju kołowym pola powierzchni A_1 i A_2 to pola przekroju poprzecznego walca o promieniu r , natomiast pole powierzchni S to pole powierzchni bocznej walca o promieniu r i długości l . Wzór (3) przyjmuje wówczas postać

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi r l = 0. \quad (4)$$

Po podstawieniu do (4) równania (2) i zastąpieniu różnicy ciśnień przyrostem Δp otrzymamy

$$\Delta p \pi r^2 + \mu \frac{dv}{dy} 2\pi r l = 0. \quad (5)$$

Po przekształceniu i uproszczeniu (5) otrzymamy

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\mu l} r dy. \quad (6)$$

Po dwustronnym scałkowaniu równanie (6) ma postać

$$v = -\frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + C. \quad (7)$$

gdzie C jest stałą całkowania zależną od warunku brzegowego.

Jako warunek brzegowy przyjmiemy, że prędkość przy ścianie przewodu wynosi 0 czyli dla $r=R$, $v=0$.

Stąd stała C jest równa

$$C = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2. \quad (8)$$

i po podstawieniu do (7) otrzymamy wzór na profil prędkości dla przepływu laminarnego

$$v = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2). \quad (9)$$

Z równania (9) wynika, że profil prędkości w przepływie laminarnym przyjmuje kształt paraboli, a wzór nosi nazwę Hagen-Poiseuille'a [1].

Prędkość maksymalna występuje w osi przewodu i może zostać obliczona przez podstawienie za $r=0$

$$v_{\max} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta p}{\mu l} \cdot R^2. \quad (10)$$

Liczbowo objętość paraboloidy obrotowej z rys. 1 jest równa strumieniowi objętości. Elementarny strumień objętości przepływający przez elementarną powierzchnię będącą pierścieniem o promieniu r i szerokości dr wynosi

$$dq_v = v \, 2\pi r \, dr. \quad (11)$$

Po podstawieniu wyznaczonego wcześniej profilu prędkości (9) do (11)

$$dq_v = \frac{\pi \Delta p}{2\mu l} r (R^2 - r^2) \, dr. \quad (12)$$

Strumień objętości otrzymamy po obliczeniu całki oznaczonej po promieniu w granicach od 0 do R

$$q_v = \frac{\pi \Delta p}{2\mu l} \int_0^R r (R^2 - r^2) \, dr, \quad (13)$$

ostatecznie

$$q_v = \frac{\pi \Delta p}{8\mu l} R^4. \quad (14)$$

Korzystając z równania ciągłości przepływu wyznaczono średnią prędkość przepływu

$$v_{sr} = \frac{q_v}{A} = \frac{q_v}{\pi R^2}. \quad (15)$$

Po podstawieniu (14) do (15) średnia prędkość jest równa

$$v_{sr} = \frac{\Delta p}{8\mu l} R^2. \quad (16)$$

Stosunek v_{sr}/v_{\max} wyznaczony zostanie po uwzględnieniu równania (10)

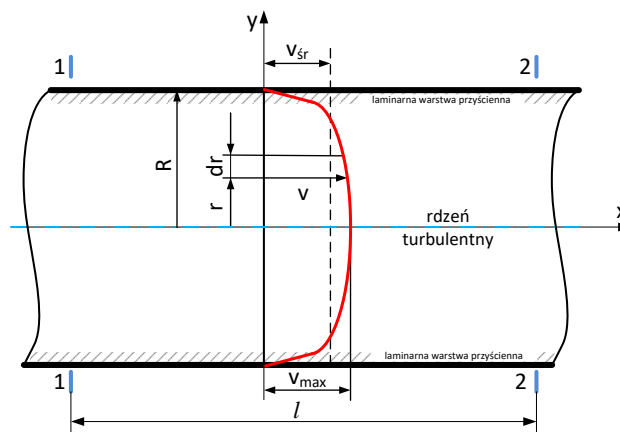
$$\frac{v_{sr}}{v_{\max}} = \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Stąd w przepływie laminarnym średnia prędkość przepływu jest połową prędkości maksymalnej

$$v_{sr} = \frac{1}{2} v_{\max}. \quad (18)$$

2.2. Profil prędkości w przepływie turbulentnym

W praktyce najczęściej występuje przepływ turbulentny. W przepływie turbulentnym można wydzielić dwie strefy: laminarną warstwę przyścienną i rdzeń turbulentny (rys. 2).



Rys. 2. Profil prędkości w przewodzie w ruchu turbulentnym.

Przyjmuje się, że w laminarnej warstwie przyściennej naprężenia styczne τ_0 są stałe. Wychodząc ze wzoru Newtona

$$\tau = \tau_0 = -\mu \frac{dv}{dy}, \quad (19)$$

stąd

$$dv = -\frac{\tau_0}{\mu} dy. \quad (20)$$

Po dwustronnym scałkowaniu równania (20) otrzymamy

$$v = -\frac{\tau_0}{\mu} y. \quad (21)$$

Z równania (21) wynika, że profil prędkości w laminarnej warstwie przyściennej jest liniowy i zależy od dynamicznego współczynnika lepkości czyli rodzaju płynu, a także parametrów stanu (ciśnienia, temperatury).

W ruchu turbulentnym oprócz składowej prędkości związanej z głównym ruchem jest jeszcze składowa ruchu pobocznego (tzw. składowa fluktuacyjna). Obecność tej składowej prowadzi to do intensywnej wymiany masy i pędu pomiędzy warstwami płynu i powstawanie tzw. naprężeń turbulentnych. Boussinesq przyjął hipotezę [1], że naprężenia turbulentne można wyznaczyć przez analogię do wzoru Newtona (19)

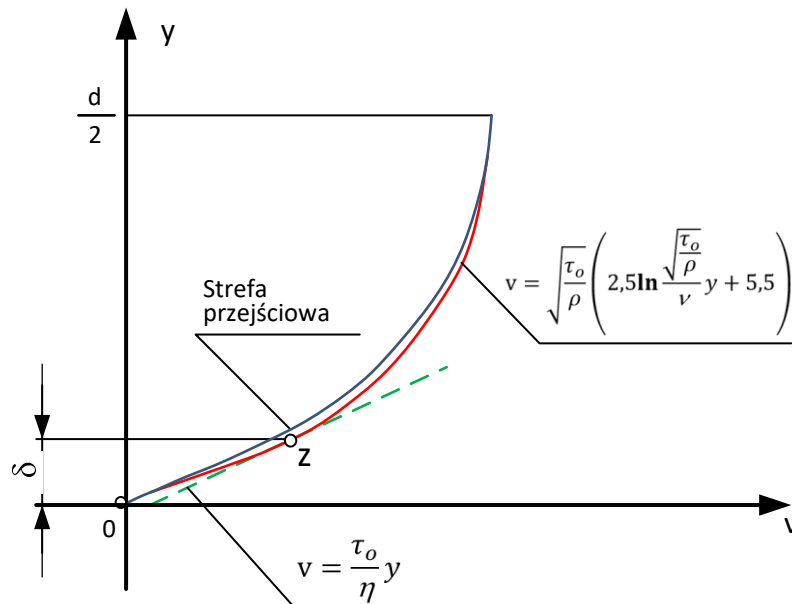
$$\tau_t = \mu_t \frac{d\bar{v}}{dy}, \quad (22)$$

gdzie μ_t – dynamiczny współczynnik lepkości turbulentnej, \bar{v} - uśredniona prędkość.

Według Prandtla turbulencja jest efektem poprzecznego przemieszczenia się cząstki płynu, podczas którego cząstka zachowuje swoją prędkość oraz pęd. Długość l poprzecznego przemieszczenia nazwał drogą mieszania. Takie założenie pozwoliło na określenie dynamicznego współczynnika lepkości turbulentnej jako

$$\mu_t = \rho l^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2, \quad (23)$$

gdzie: l – tzw. droga mieszania podczas, v_x – składowa prędkości ruchu głównego.



Rys. 2 Rozkład prędkości w podwarstwie laminarnej i rdzeniu burzliwym, $y=R-r$ (odległość od ścianki w przewodzie o przekroju kołowym).

Po złożonych przekształceniach, z uwzględnieniem hipotezy Prandtla dotyczącej tzw. drogi mieszania uzyskano wzór opisujący profil prędkości w rdzeniu turbulentnym

$$v = v^* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{v^* y}{\nu} + \beta - \frac{1}{\kappa} \ln \beta \right) \quad (24)$$

gdzie: $v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ - prędkość tarcia.

Dla przewodu o przekroju kołowym stałe κ i β zostały wyznaczone eksperymentalnie i wynoszą odpowiednio około 0,4 i 11,5. Wyznaczone stałe κ i β są praktycznie niezależne od liczby Reynoldsa. Po ich podstawieniu do (24) otrzymano

$$v = v^* \left(2,5 \ln \frac{v^* y}{\nu} + 5,5 \right) \quad (25)$$

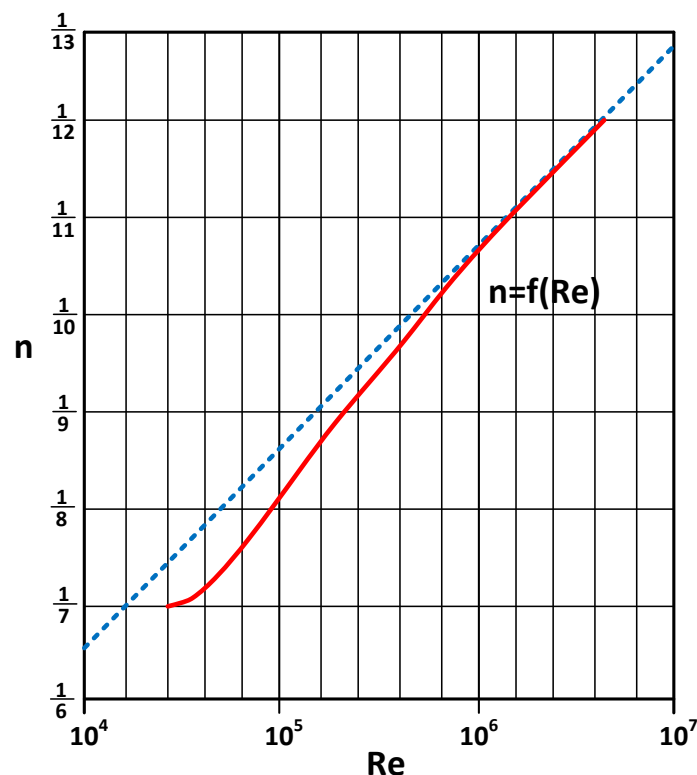
Z równania (25) wynika, że profil prędkości w rdzeniu turbulentnym jest opisany funkcją logarytmiczną. Profil opisany powyższym równaniem nazywany jest **uniwersalnym profilem prędkości**.

Profil prędkości opisany równaniem (26) jest dosyć skomplikowany, więc w praktyce czasem stosuje się modele uproszczone. Jednym z nich jest model empiryczny Prandtla. Model ten opisany jest w przybliżeniu rozkład prędkości dla przepływu turbulentnego można wyznaczyć również równaniem (7), jest to tzw. model Prandtla, który jest łatwy do rozwiązania.

$$v = v_{\max} \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (7)$$

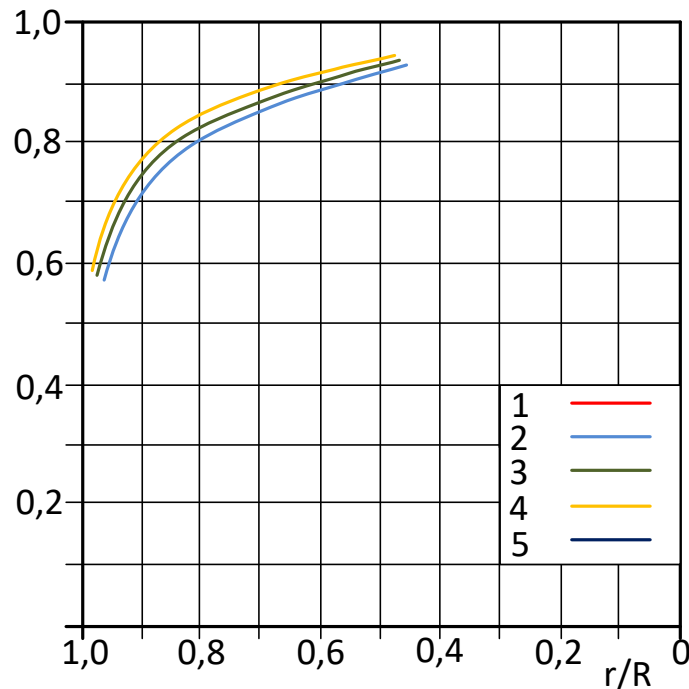
R – promień przewodu, $r \in [0, R]$, n – współczynnik zależny od liczby Reynoldsa ($n = 2,1 \cdot \log Re - 1,9$).

Zależność współczynnika n od liczby Reynoldsa przedstawiono na rysunku 3:



Rys. 3. Zależność $n=f(Re)$.

Na rys. 4 przedstawiono rozkład prędkości w zależności od liczby Reynolds'a.

Rys. 4. Profile prędkości dla różnych wartości Re .

1 - $Re=4 \cdot 10^3$, 2 - $Re=105 \cdot 10^3$, 3 - $Re=111 \cdot 10^4$, 4 - $Re=235 \cdot 10^4$, 5 - $Re=324 \cdot 10^4$.

Ostatecznie po przekształceniu wzoru (7) otrzymujemy zależność do sporządzenia charakterystyki teoretycznej w wartościach względnych:

$$\left(\frac{v}{v_{max}}\right)_{teor} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2,1 \cdot \log Re - 1,9}} \quad (8)$$

Powyższa formuła wyrażona jest w wartościach względnych, ma to na celu zachowanie kształtu przebiegu krzywej niezależnie od wartości prędkości.

Z równania (7) wynika, że do obliczeń potrzebna jest wartość liczby Re , którą wyznaczamy ze równania

$$Re = \frac{v_{sr} \cdot D \cdot \rho_p}{\mu} \quad (9)$$

gdzie: D – średnica przewodu, ρ_p – gęstość powietrza, μ – współczynnik lepkości, v_{sr} – prędkość średnia.

Obliczenie prędkości średniej v_{sr} należy przeprowadzić zgodnie z Polską normą, według której pole przekroju przewodu należy podzielić na pierścienie o równych polach (liczba pierścieni jest zależna od średnicy badanego przewodu) w tym przypadku są to

4 pierścienie. W środku każdego z tych pól dokonujemy pomiaru prędkości, a ich sumę należy podzielić przez ich liczbę, czyli w tym przypadku 4 daje, stąd

$$v_{sr} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 v_i = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4} \quad (10)$$

Jednym z najprostszych sposobów pomiaru prędkości miejscowej jest zastosowanie rurek piętujących. **Rurka piętująca** jest to rurka, w której energia kinetyczna cieczy przemieniana jest w energię ciśnienia, co dzięki odpowiedniemu ukształtowaniu rurki umożliwia pomiar ciśnienia lub spadku ciśnienia.

Rurka Pitota – składa się z koncentrycznej rurki, z częścią wygiętą pod kątem prostym (głowicą) tak, że rurka jest zwrócona czołem w kierunku dopływającego płynu, po jej umieszczeniu wewnątrz kanału. Jest to przyrząd do pomiaru ciśnienia całkowitego p_c , a przy przepływie płynów stosowany również do wyznaczania prędkości przepływu.

$$p_c = p_s + p_d \quad (11)$$

gdzie: p_s – ciśnienie statyczne, p_d – ciśnienie dynamiczne.

Aby wyznaczyć prędkość musimy wyznaczyć ciśnienie dynamiczne. Rurka Pitota mierzy ciśnienie całkowite, więc potrzebne jest jeszcze ciśnienie statyczne p_s , które możemy zmierzyć na ścianie rury. Otwór na ścianie musi być w jednej osi (rys. 4) z czołem rurki Pitota. Mając zmierzone p_c i p_s można obliczyć p_d :

$$p_d = p_c - p_s \quad (12)$$

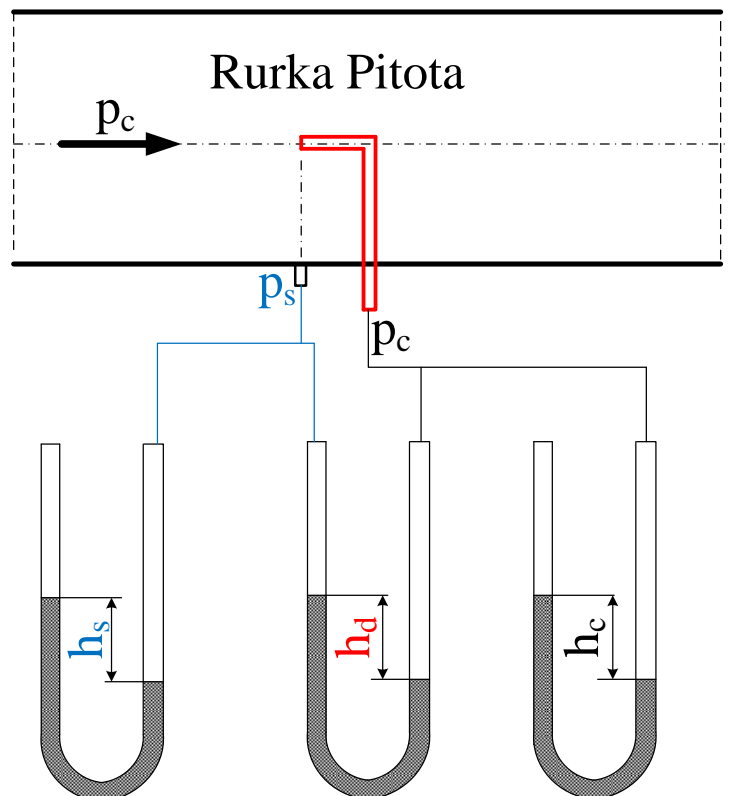
gdzie: p_s – ciśnienie statyczne, p_c – ciśnienie całkowite.

Ze wzoru na ciśnienie dynamiczne

$$p_d = \frac{\rho v^2}{2}. \quad (13)$$

Po przekształceniu otrzymujemy zależność na obliczenie prędkości

$$v = \sqrt{\frac{2p_d}{\rho}}. \quad (14)$$



Rys. 4. Różne układy pomiaru za pomocą rurki Pitota

Zmierzona wysokość ciśnienia dynamicznego h_d (rys. 4), umożliwia obliczenie ciśnienia dynamicznego

$$p_d = \rho_w g h_d \quad (15)$$

gdzie:

p_d -ciśnienie dynamiczne,

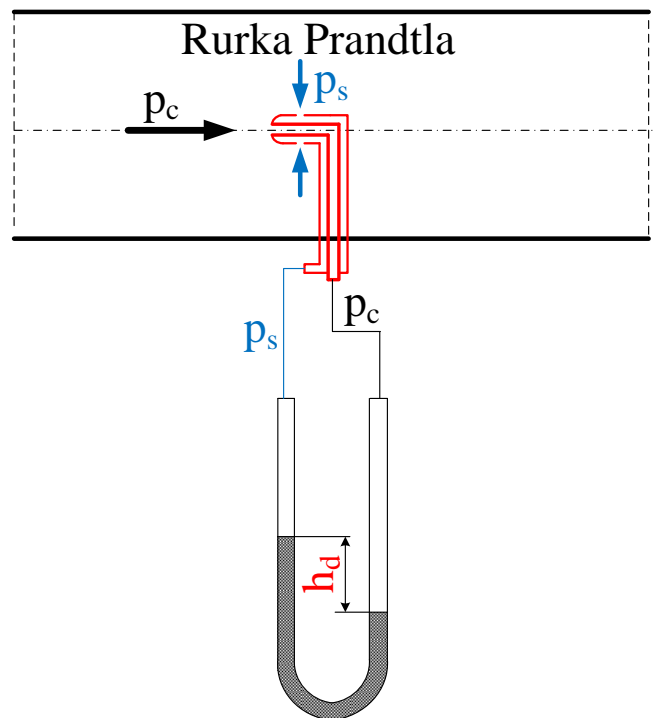
ρ_w -gęstość cieczy manometrycznej,

h_d -wysokość ciśnienia dynamicznego.

Po podstawieniu wzoru (15) do (14) otrzymujemy zależność na policzenie prędkości:

$$v = \sqrt{\frac{2 h_d g \rho_w}{\rho_p}}. \quad (16)$$

Rurka Prandtla – przyrząd do pomiaru prędkości przepływu płynu poprzez pomiar ciśnienia dynamicznego w przepływającym płynie. Za pomocą rurki Prandtla odpowiednio podłączonej do manometru można zmierzyć p_c , p_s , p_d (rys. 5). Zbudowana jest z dwóch osadzonych w sobie rurek, z czego pierwsza wewnętrzna służy do pomiaru ciśnienia całkowitego płynu, natomiast zewnętrzna do pomiaru ciśnienia statycznego.



Rys. 5. Pomiar ciśnienia dynamicznego za pomocą rurki Prandtla.

3. Opis stanowiska

Stanowisko składa się następujących elementów:

- Przewodu z przezroczystego tworzywa (1), przez który dmuchawa (2) tłoczy powietrze o regulowanym strumieniu objętości q_v .
- Rurki Pitota zamontowanej na prowadnicy z noniuszem (3). Umiejscowioną na prowadnicy rurkę Pitota można przesuwając w kierunku promieniowym oraz wykonać pomiar rzędnej położenia osi tej rurki względem osi przewodu.
- Mikromanometru różnicowego M (4).
- Manometru M_R (5) do pomiaru ciśnienia różnicowego względnego, które jest mierzone na ścianie przewodu.
- Termometru (6).

4. Procedura badawcza

Zapoznać się z budową stanowiska i sporządzić jego schemat, na którym należy zaznaczyć opisane w pkt. 3 elementy.

W celu uruchomienia stanowiska badawczego i przeprowadzenia pomiarów należy:

1. Włączyć wentylator (2).
2. Odczytać wskazanie manometru różnicowego M_R (5) (ciśnienie statyczne p_s) - odczyt jednorazowy. Ciśnienie względne w przewodzie mierzone jest za pomocą manometru dwuramiennego, z jednej strony połączonego z atmosferą, z drugiej zaś z króćcem bocznym.
3. Odczytać parametry otoczenia (temperatura T_o , ciśnienie barometryczne p_b , wilgotność) - odczyt jednorazowy.
4. Ustawić na noniuszu 66,0 mm (3), w tym położeniu rurka Pitota znajduje się w pierwszym punkcie pomiarowym, 1 mm od ścianki przewodu, której średnica wynosi 80 mm.
5. Po ustawieniu rurki Pitota w położeniu 1 mm od ścianki przewodu odczytać wysokość ciśnienia wskazywaną przez manometr M (4). Jest to pierwszy pomiar.
6. Dalsze 19 pomiarów wykonujemy z krokiem podanym w tabeli pomiarowej nr 1.
7. Wykonać pomiary wysokości ciśnienia i odczytać na manometrze M, dla 4 promieni podanych w tabeli nr 2. Są to wielkości potrzebne do obliczenia prędkości średniej.

*Podczas przesuwania linijki **Li** nie wolno naciskać na rurkę Pitota. Linijkę przesuwając posługując się śrubą z gwintem drobnozwojowym oraz specjalną podkładką stopniowaną: 10, 20, 30 mm.*

5. Tabela wielkości mierzonych

Tabela wielkości pomiarowych do tego ćwiczenia zamieszczona jest na końcu instrukcji. Tabelę należy uzupełnić o jednostki wielkości mierzonych.

6. Opracowanie wyników pomiarów

Opracowanie wyników pomiarów należy wykonać zgodnie z poniższymi wytycznymi:

- 1) Na podstawie zapisanych warunków otoczenia, obliczyć ciśnienie pary nasyconej, gęstość powietrza oraz dynamiczny współczynnik lepkości.

Ciśnienie pary nasyconej:

$$p_{nas} = 9,8065 \cdot 10^5 \frac{e^{0,01028 \cdot T - \frac{7821,541}{T} + 82,86568}}{T^{11,48776}}$$

Gęstość powietrza:

$$\rho_p = \frac{1}{R_s} \frac{1 + \frac{0,622 \cdot \varphi \cdot p_{nas}}{p - \varphi \cdot p_{nas}}}{1 + \frac{\varphi \cdot p_{nas}}{p - \varphi \cdot p_{nas}}} \frac{p}{T}$$

Dynamiczny współczynnik lepkości:

$$\mu = \mu_0 \frac{273+C}{T+C} \left(\frac{T}{273} \right)^{\frac{3}{2}},$$

gdzie: μ_0 – dynamiczny współczynnik lepkości w temperaturze 273 K (dla powietrza $\mu_0 = 17,08 \cdot 10^{-6} \text{Pa} \cdot \text{s}$); C – stała Sutherlanda (dla powietrza C = 112).

2) Na podstawie danych pomiarowych dla każdego z punktów pomiarowych obliczyć prędkość v , korzystając z zależności (16).

3) Z obliczonych w poprzednim punkcie wartości prędkości v , znaleźć największą prędkość v_{\max} . W następnej kolumnie zapisujemy wartości v/v_{\max} (czyli, każdą obliczoną wartość prędkości v dzielimy przez wartość prędkości maksymalnej v_{\max}).

4) Wyznaczyć ze wzoru (10) v_{sr} (na podstawie zmierzonych wartości v dla 4 promieni).

5) Wyznaczyć wartość liczby Reynoldsa.

6) Przedstawić graficznie profil prędkości we współrzędnych bezwymiarowych

$\frac{v}{v_{\max}} = f\left(\frac{r}{R}\right)$. Punktowy (pomiarowy) sporządzamy na podstawie pomiarów.

7) Sporządzić charakterystykę teoretyczną (linia ciągła), korzystając ze wzoru (8).

8) Odczyty wskazań przyrządów oraz wyniki obliczeń należy zestawić w tablicy pomiarowej.

7. Pytania kontrolne

- 1) Różnice w profilu dla przepływu laminarnego i turbulentnego.
- 2) Co to jest ciśnienie całkowite?
- 3) Gdzie mierzymy ciśnienie statyczne?
- 4) Wzór na ciśnienie dynamiczne.
- 5) Budowa rurki Pitota.
- 6) Co mierzy rurka Pitota?
- 7) Schemat połączeń rurki Pitota w układzie do pomiaru wysokości ciśnienia dynamicznego.
- 8) Rurka Prandtla, budowa?
- 9) Co mierzy rurka Prandtla?
- 10) Z jakiego wzoru liczymy liczbę Reynoldsa?

Literatura

[\[1\] Krystyna Jeżowiecka-Kabsch, Henryk Szewczyk, Mechanika Płynów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001](#)

Tabela pomiarowa do L3

Data wykonania pomiarów:.....

Tabela pomiarowa do rozkładu prędkości

Lp	Li	r	Δh	T	Lp	Li	r	Δh	T
	mm	mm				mm	mm		
1	66,0	39,0			11	51,0	24		
2	65,0	38,0			12	49,0	22		
3	64,0	37,0			13	47,0	20		
4	63,0	36,0			14	45,0	18		
5	61,5	34,5			15	43,0	16		
6	60,0	33,0			16	41,0	14		
7	58,5	31,5			17	38,0	11		
8	57,0	30			18	35,0	8		
9	55,0	28			19	32,0	5,0		
10	53,0	26			20	29,0	2,0		
					21	27,0	0,0		

Tabela do wyznaczenia prędkości średniej

Pomiar ciśnienia statycznego. $p_s = \dots\dots\dots$	i	1	2	3	4
	r_i/R	0,331	0,612	0,800	0,950
	Δh				

Warunki pomiaru		
Symbol	Jednostka	Wartość
p_b	kPa	
φ	%	

Sekcja nr			
Lp.	Nazwisko	Imię	Nr albumu
1.			
2.			
3.			

Data, podpis prowadzącego