



Politechnika Wrocławska

Wydział Mechaniczno-Energetyczny

Ćwiczenie L9

WSPÓŁCZYNNIK STRAT LINIOWYCH W PRZEPŁYWIE LAMINARNYM

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie zależności współczynnika strat liniowych od liczby Reynoldsa przepływu laminarnego oraz porównanie wyników pomiarów z wynikami teoretycznymi obliczonymi z modelu matematycznego.

2. Wstęp teoretyczny

Przepływ płynu ma charakter laminarny wtedy, kiedy jego elementy poruszają się po torach prostych lub łagodnie zakrzywionych, zgodnych z kształtem ścian rurociągu. W rezultacie, płyn zachowuje się tak, jakby poruszał się warstwami, pomiędzy którymi nie zachodzi wymiana masy (stąd nazwa – przepływ uwarstwiony). W rzeczywistości jednak, taki efekt, czyli brak wymiany masy pomiędzy warstwami płynu, może być rozpatrywany tylko i wyłącznie w skali makroskopowej, ponieważ w skali mikroskopowej zachodzi dyfuzja molekularna. Stąd też, poszczególne cząsteczki płynu wykonują chaotyczny ruch w różnych kierunkach, co prowadzi w ruchu laminarnym, do wymiany masy, a w rezultacie, także zmiany pędu. Jest to przyczyną występowania naprężeń stycznych.

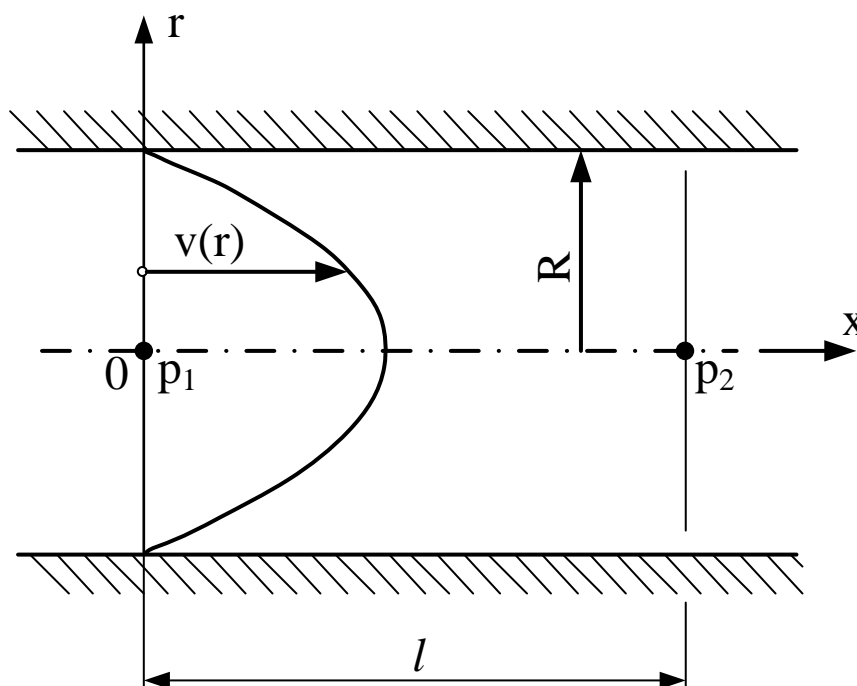
Na podstawie powyższych rozważań, można sformułować stwierdzenie, że charakter przepływu wynika z działania sił lepkości oraz sił bezwładności. Wspomniany uprzednio przepływ uwarstwiony występuje, gdy siły bezwładności mają niewielki wpływ na tor ruchu elementów płynu. Stąd, w przypadku przepływu laminarnego, siła lepkości znacząco dominuje nad siłą bezwładności, a wszelkie powstające zaburzenia są tłumione. Liczbą kryterialną pozwalającą określić charakter przepływu płynu, jest liczba Reynoldsa (1), która reprezentuje stosunek siły bezwładności do siły lepkości

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \quad (1)$$

gdzie: v – średnia prędkość płynu w przewodzie, d – średnica przewodu, ν – kinematyczny współczynnik lepkości.

Na podstawie badań doświadczalnych ustalono, że w przypadku przepływu wody przez przewód o przekroju kołowym, przepływ laminarny występuje, gdy $Re < 2300$. W momencie, w którym zostanie przekroczona krytyczna wartość liczby Re , a więc odpowiednio zwiększy się stosunek siły bezwładności do siły lepkości, przepływ może utracić stabilność i przyjąć charakter turbulentny.

Jednym z najprostszych przypadków ruchu płynu lepkiego i nieściśliwego jest ustalony ruch laminarny w rurze o stałym przekroju. Poniżej, rozpatrzono ustalony przepływ płynu lepkiego i nieściśliwego przez rurę o długości l i stałym przekroju kołowym o promieniu R (rys. 1) pod wpływem różnicy ciśnień $\Delta p = p_1 - p_2$, występującej na tej długości.



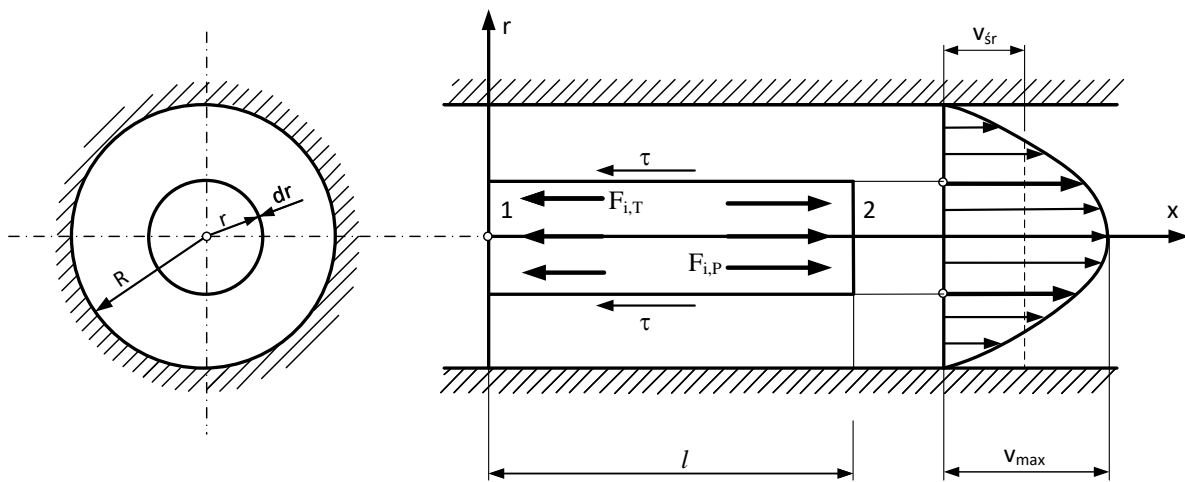
Rysunek 1. Rzut boczny przewodu o przekroju kołowym z zaznaczonymi parametrami geometrii, układem współrzędnych oraz rozkładem prędkości względem przekroju (osiowo-symetryczny przepływ laminarny Hagen–Poiseuille’a)

2.1. Wyznaczenie rozkładu prędkości w przekroju rury w przypadku przepływu laminarnego.

Aby określić rozkład prędkości $v(r)$ w przekroju poprzecznym rury, można wykorzystać równanie Naviera–Stokesa dla ruchu ustalonego, wyrażone we współrzędnych cylindrycznych (r, θ, x) , uwzględniające dwa warunki: prędkość przy ścianie przewodu $v(R) = 0$ oraz skończoną prędkość w osi przewodu. Ten sposób rozwiązania jest jednak skomplikowany, co zostało szczegółowo opisane w rozdz. 6.4.2. poz. [1].

Rezultatem rozwiązania równania Naviera–Stokesa jest rozkład prędkości $v(r)$ w przekroju poprzecznym przewodu.

Do wyznaczenia rozkładu prędkości w ustalonym przepływie osiowo-symetrycznym w niniejszym ćwiczeniu wykorzystano równowagę siły powierzchniowej występującej w tym przepływie, tj. siły ciśnieniowej wywołującej przepływ oraz siły tarcia. Rozpatrzmy, więc równowagę sił w objętości płynu w kształcie walca o promieniu r i długości l (rys. 2).



Rysunek 2. Układ sił powierzchniowych
w osiowo-symetrycznym przepływie laminarnym

Równowaga siły ciśnieniowej wywołującej przepływ oraz siły tarcia wewnętrznego wyraża się równaniem

$$\sum F_{i,P} = \sum F_{i,T}. \quad (2)$$

Zgodnie z prawem Newtona, naprężenie styczne wyrażone jest wzorem (3)

$$\tau = \frac{dF_T}{dS}, \quad (3)$$

gdzie: τ – naprężenie styczne, F_T – elementarna siła styczna, dS – jednostkowa powierzchnia

Przekształcając zależność (3) ze względu na jednostkową siłę styczną oraz uwzględniając jednostkową powierzchnię, jako $dS = 2\pi r dz$, siła tarcia opisane jest zależnością

$$dF_T = \tau dS = \tau 2\pi r dz, \quad (4)$$

gdzie: dF_T – elementarna siła tarcia, τ – naprężenie styczne między warstwami płynu, dS – jednostkowa powierzchnia warstwy płynu, dz – współrzędna wzdłuż długości przewodu.

Wprowadzając pojęcie szybkości ścinania, którą reprezentuje wzór

$$\dot{\gamma} = \frac{dv}{dr}, \quad (5)$$

naprężenie styczne można zastąpić przez

$$\tau = \mu \dot{\gamma} = \mu \frac{dv}{dr} \quad (6)$$

gdzie: μ – dynamiczny współczynnik lepkości.

Zatem wyrażenie na siłę tarcia wewnątrz płynu sprowadza się do postaci

$$dF_T = \mu \frac{dv}{dr} 2\pi r dz. \quad (7)$$

Z kolei siłę ciśnieniową wyprowadza się rozpoczynając od pojęcia ciśnienia (8)

$$\Delta p = \frac{F_P}{A}, \quad (8)$$

gdzie: $\Delta p = (p_1 - p_2)$ – ciśnienie, F_P – siła ciśnieniowa (normalna względem powierzchni warstwy płynu), A – powierzchnia rozpatrywanej warstwy płynu.

Po przekształceniu równania (8) ze względu na F_P oraz uwzględnieniu wyrażenia na powierzchnię przekroju rury, a siłę ciśnieniową wyraża się równaniem

$$F_P = \Delta p A = \Delta p \pi r^2 \quad (9)$$

Podstawiając wyrażenie na siłę tarcia wewnątrz płynu (7) oraz siłę ciśnieniową (9) do warunku równowagi sił (2), otrzymuje się zależność

$$\mu \frac{dv}{dr} 2\pi r dz = \Delta p \pi r^2. \quad (10)$$

Po scałkowaniu równania (10) względem dz oraz uwzględnieniu warunku (11) zgodnie z którym prędkość na ścianie rury jest zerowa

$$v|_{r=R} = 0 \quad (11)$$

otrzymuje się zależność

$$v = \frac{1}{4} \frac{\Delta p}{\mu l} (R^2 - r^2). \quad (12)$$

Z równania (12) wynika, że rozkład prędkości w rurze o przekroju kołowym, jest paraboliczny (rys. 3), a maksymalną prędkość oblicza się na podstawie równania (13) przyjmując w równaniu (12) wartość $r = 0$. Stąd wynika, że występuje ona w osi rury

$$v_{max} = \frac{1}{4} \frac{\Delta p}{\mu l} R^2. \quad (13)$$

2.2 Strumień objętości w przepływie laminarnym

Objętość paraboloidy, której przekrój pokazano na rysunku 3, jest wprost związana ze strumieniem objętości. Rozpatrując element powierzchniowy przekroju poprzecznego w kształcie pierścienia o promieniach r i $r + dr$. Elementarny strumień objętości określa równanie

$$dq_V = v \, 2\pi r \, dr. \quad (14)$$

Zatem całkowity strumień objętości wynosi

$$q_V = \frac{\pi \Delta p}{2\mu l} \int_0^R r (R^2 - r^2) \, dr, \quad (15)$$

$$q_V = \frac{\pi \Delta p}{8\mu l} R^4. \quad (16)$$

Powyższe rozważania doprowadzają do stwierdzenia, że w ustalonym ruchu laminarnym nieściśliwego płynu lepkiego, strumień objętości jest wprost proporcjonalny do jednostkowego spadku ciśnienia oraz do czwartej potęgi promienia rury, natomiast odwrotnie proporcjonalny do lepkości. Twierdzenie to nazywane jest *prawem Hagen-Poiseuille'a*.

2.3. Spadek ciśnienia Δp oraz współczynnik strat liniowych λ w przepływie laminarnym

Znając wartość strumienia objętości można określić średnią prędkość przepływu w rurze, co reprezentuje zależność (11)

$$v_{sr} = \frac{q_V}{A} = \frac{\Delta p}{8\mu l} R^2. \quad (17)$$

Biorąc pod uwagę równanie (7)

$$v_{sr} = \frac{1}{2} v_{max}, \quad (18)$$

oraz przekształcając równanie (10) z uwzględnieniem średnicy przewodu ($d = 2R$), otrzymuje się wyrażenie na spadek ciśnienia w przepływie laminarnym

$$\Delta p = \frac{8\mu q_V l}{\pi R^4} = \frac{128\mu q_V l}{\pi d^4}. \quad (19)$$

Następnie, podstawiając równanie ciągłości przepływu i otrzymaną stratę ciśnienia do zależności (13), przez porównanie ze wzorem Darcy'ego-Weisbacha otrzymuje się wyrażenie na spadek ciśnienia w przepływie laminarnym.

$$\Delta p = \frac{32\mu v_{sr} l}{d^2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v_{sr}^2}{2}. \quad (20)$$

Z równania (20) wyznacza się współczynnik strat liniowych otrzymując

$$\lambda = \frac{64}{\frac{v_{sr} d \rho}{\mu}} = \frac{64}{Re} \quad (21)$$

Z równań (19) wynika, że liniowy spadek ciśnienia w ruchu laminarnym jest wprost proporcjonalny do prędkości przepływu oraz strumienia objętości. Natomiast współczynnik strat liniowych maleje ze wzrostem liczby Reynoldsa.

Otrzymane w wyniku powyższych przekształceń równania stanowią model matematyczny pozwalający wyznaczyć współczynnik strat liniowych λ , znając liczbę Reynoldsa lub średnią prędkość przepływu v_{sr} , średnicę przewodu d oraz kinematyczny współczynnik lepkości ν .

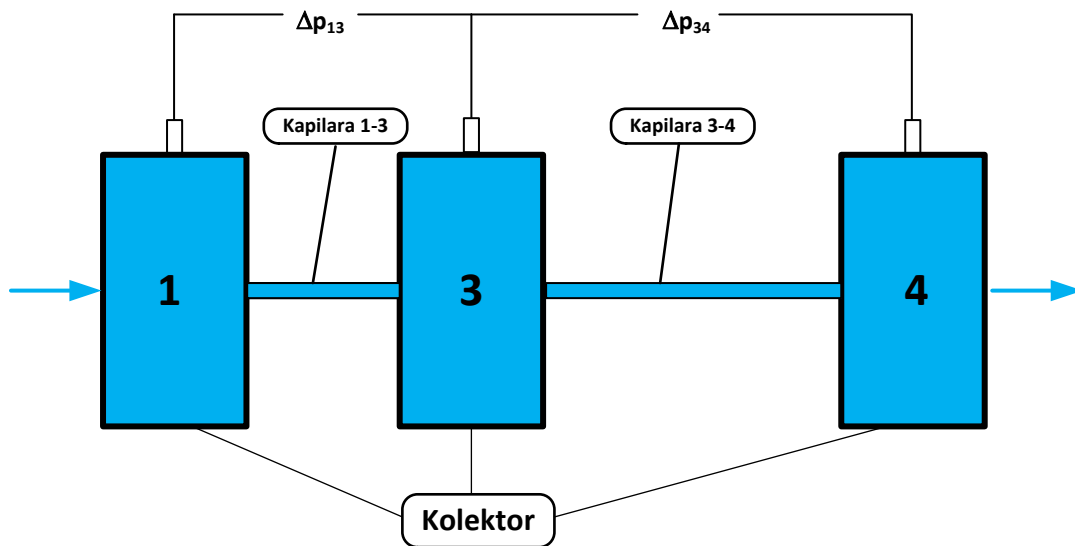
2.4 Metoda kompensacyjna

Przy pomiarze spadku ciśnienia na długości rurki kapilarnej czyli rurki o małej średnicy, istnieje problem techniczny polegający na braku możliwości wykonania króćców pomiarowych. Wynika on z tego, że króćce pomiarowe mają większą średnicę niż rurka kapilarna. Z tego względu do wyznaczenia straty liniowej w rurkach kapilarnych stosowana jest metoda kompensacyjna.

Ogólnie metoda kompensacyjna może być stosowana zarówno do wyznaczania strat hydraulicznych liniowych lub miejscowych. Polega ona na pomiarze dwóch różnic ciśnienia w wybranych przekrojach oraz opisanie ich za pomocą równań zawierających sumę strat liniowych i miejscowych. Następnie z tak zapisanego układu równań, w zależności od potrzeb, eliminuje się stratę liniową lub miejscową. Osiąga się to mnożąc

równania przez stałe i sumując stronami tak, aby po zsumowaniu dany rodzaj strat wynosił 0 czyli został wyeliminowany z równań. W ten sposób z układu równań wyznaczony zostaje tylko jeden interesujący nas rodzaj strat, miejscowych lub liniowych.

W celu zastosowania metody kompensacyjnej należy zbudować specjalny układ pomiarowy. W przypadku pomiaru spadku ciśnienia w rurkach kapilarnych składa on się z trzech kolektorów, do których podłączone są króćce pomiarowe manometrów oraz znajdujących się pomiędzy nimi dwóch rurek kapilarnych o takich samych średnicach i różnych długościach (rys. 3).



Rysunek 3. Układ rurek kapilarnych połączonych szeregowo.

Pomiar wysokości ciśnienia pomiędzy kolektorami 1-4 i 3-4 można zapisać jako sumę wysokości strat liniowych i miejscowych

$$\Delta h_{14}^s = \Delta h_{14}^{sl} + \Delta h_{14}^{sm}, \quad (22)$$

$$\Delta h_{34}^s = \Delta h_{34}^{sl} + \Delta h_{34}^{sm}. \quad (23)$$

Wysokości strat liniowych można zapisać korzystając z równania Darcy'ego-Weisbacha jako

$$\Delta h_{14}^{sl} = \lambda \frac{(l_{13} + l_{34})}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad (24)$$

$$\Delta h_{34}^{sl} = \lambda \frac{l_{34}}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (25)$$

Jako warunek upraszczający przyjmuje się, że suma strat miejscowych na wlocie i wylocie wszystkich kolektorów jest taka sama czyli spełniony jest warunek

$$\Delta h_{14}^{sm} = 2\Delta h_{34}^{sm}. \quad (26)$$

Podstawiając równania (24–26) do (22–23) otrzymano równania

$$\Delta h_{14}^s = \lambda \frac{(l_{13}+l_{34})}{d} \frac{v^2}{2g} + 2\Delta h_{34}^{sm}, \quad (27)$$

$$\Delta h_{34}^s = \lambda \frac{l_{34}}{d} \frac{v^2}{2g} + \Delta h_{34}^{sm}. \quad (28)$$

Z równań (27–28) eliminujemy stratę miejscową Δh_{34}^{sm} mnożąc równanie (28) przez 2, a następnie odejmując stronami równania (27) i (28). W wyniku tych operacji otrzymamy

$$\Delta h_{14}^s - 2\Delta h_{34}^s = \lambda \frac{(l_{13}+l_{34})}{d} \frac{v^2}{2g} - \lambda \frac{2l_{34}}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (29)$$

Następnie wspólną część z prawej strony równania wyciągniemy przed nawias, a prędkość zastąpimy strumieniem objętości korzystając z równania ciągłości przepływu

$$\Delta h_{14}^s - 2\Delta h_{34}^s = \lambda \left[\frac{(l_{13}+l_{34})}{d} - \frac{2l_{34}}{d} \right] \frac{8q_v^2}{\pi^2 d^4 g}. \quad (30)$$

Z równania (30) wyznaczono zmierzony współczynnik strat liniowych dla rurek kapilarnych znając wysokości spadków ciśnienia pomiędzy kolektorami 1-4 i 3-4

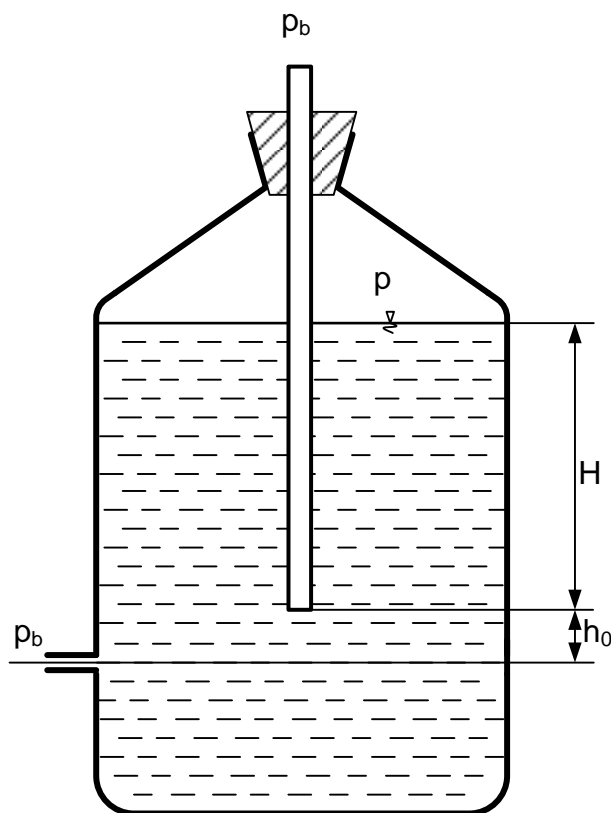
$$\lambda = \frac{\Delta h_{14}^s - 2\Delta h_{34}^s}{(l_{13} - l_{34}) \frac{8q_v^2}{\pi^2 d^4 g}}. \quad (31)$$

Zmierzona wysokość straty liniowej na odcinku 1-4 wyznaczona została z równania (24) poprzez podstawienie za współczynnik strat liniowych wartości obliczonych z (31) i zastąpienie prędkości strumieniem objętości.

2.5 Zbiornik Mariotte'a

Zbiornik Mariotte'a stosowany jest do utrzymywania stałego ciśnienia zasilającego układ, a tym samym stałej prędkości wypływu (rys. 4). Zbiornik Mariotte'a jest szczelnie zamknięty korkiem z pionową otwartą rurką, zanurzoną w cieczy na

głębokość H . Króciec wypływowy ze zbiornika umieszczony jest poniżej pionowej rury o wysokość h_0 .



Rysunek 4. Zbiornik Mariotte'a.

Gdy ciecz wypływa przez króciec to opada jej poziom w zbiorniku przez co nad powierzchnią cieczy powstaje podciśnienie. Pod wpływem różnicy ciśnień przez rurkę dostaje się do zbiornika powietrze. Można wówczas zaobserwować na wylocie pionowej rurki pęcherzyki powietrza. Oznacza to, że na wylocie rurki panuje ciśnienie barometryczne. Sytuacja taka utrzymuje się dopóki poziom cieczy w zbiorniku jest powyżej wylotu pionowej rurki.

Ciśnienie na poziomie króćca wylotowego jest sumą ciśnienia barometrycznego oraz ciśnienia hydrostatycznego związanego z wysokością h_0

$$p_0 = p_b + \rho g h_0. \quad (32)$$

Wypływ przez króciec odbywa się w takim razie pod wpływem różnicy ciśnień p_0 i ciśnienia barometrycznego na wylocie króćca czyli ciśnienia hydrostatycznego ρgh_0 . Ponieważ odległość h_0 jest stała to prędkość wypływu jest także stała.

3. Opis stanowiska

Stanowisko składa się z następujących elementów:

- zbiornika zasilającego Mariotte'a (1),
- przewodów zasilających (2),
- odcinka pomiarowego w postaci dwóch rurek kapilarnych połączonych szeregowo za pomocą kolektorów (3),
- czterech piezometrów (4),
- zbiornika mierniczego z podziałką 0 cm^3 , 25 cm^3 , 50 cm^3 oraz 75 cm^3 (5),
- rotametrzu (6),
- zaworu regulacyjnego (7),
- sekundomierza (8),
- termometru (9),
- zaworu spustowy (10).

4. Procedura badawcza

Ćwiczenie polega na pomiarze strumienia objętości (q_v) metodą objętościową poprzez pomiar objętości przepływającej cieczy V , w czasie τ oraz pomiarze wysokości spadków ciśnienia na odcinkach 1–4 oraz 3–4 przy różnych wartościach strumienia objętości. W rezultacie otrzymuje się serię danych pomiarowych (V , τ , Δh).

W celu wykonania ćwiczenia należy:

- 1) Narysować schemat stanowiska oraz zaznaczyć mierzone wielkości,
- 2) Otworzyć zawór regulacyjny (7) i ustawić na rotametrze (6) wartość strumienia objętości równą 55 działek.
- 3) Zaczekać na ustabilizowanie się wychyleń manometrów (4) kontrolując i utrzymując liczbę 55 działek na rotametrze (6).

- 4) Po ustabilizowaniu się wychyleń manometrów, odczytać różnicę wysokości ciśnienia Δz_{14} i Δz_{34} manometrów (4) oraz wartość temperatury cieczy wskazywaną przez termometr (9).
- 5) Przeprowadzić pomiar strumienia objętości przepływającej wody zgodnie z procedurą opisaną poniżej.
- 6) Za pomocą zaworu regulacyjnego (7) zmniejszyć wartość strumienia objętości cieczy o 5 działek.
- 7) Zaczekać na ustalenie się wychyleń manometrów, sprawdzić wskazywaną na rotametrze liczbę działek, w razie potrzeby dokonać korekty nastawy zaworu regulacyjnego (7).
- 8) Odczytać różnicę wysokości ciśnień na manometrach (4), czas napełniania zbiornika mierniczego (5) oraz wartość temperatury cieczy wskazywaną przez termometr (9).
- 9) Powtórzyć punkty 7–9 zmniejszając liczbę działek na rotametrze (6) do 5 z krokiem co 5 działek.
- 10) Zakończenie pomiarów zgłosić prowadzącemu.
- 11) Po zaakceptowaniu otrzymanych wyników przez prowadzącego zajęcia, zamknąć zawór regulacyjny (7).

Procedura pomiaru strumienia objętości wody:

do pomiaru strumienia objętości wody należy wykorzystać: sekundomierz (8), zbiornik mierniczy z podziałką (5) oraz zawór spustowy (10). W celu przeprowadzenia pomiaru należy:

- zamknąć zawór (10),
- czekać do momentu, w którym poziom wody w naczyniu (5) zrówna się z pierwszą linią wskazującą 0 cm³,
- włączyć sekundomierz (8) (pomiar nie może trwać krócej niż 60 sekund),
- po przekroczeniu czasu 60 sekund, nie wyłączając sekundomierza, czekać, aż poziom wody w zbiorniku (5) zrówna się z linią wskazującą objętość 25 lub 50 lub 75 cm³,
- w momencie zrównania się poziomu wody w zbiorniku (5) z linią wskazującą mierzoną objętość, czyli 25, 50 lub 75 cm³ zatrzymać sekundomierz (8),
- odczytać z sekundomierza i zapisać w protokole pomiarowym zmierzony czas z dokładnością taką, jaką on pokazuje, odczytać wartość objętości (25, 50 lub 75 cm³)

- usunąć wodę ze zbiornika mierniczego (5) poprzez otwarcie zaworu (10). Nie opróżniać całkowicie zbiornika (5), zwierciadło wody obniżyć maksymalnie o 2 cm poniżej poziomu wskazującego 0 cm³. Zabieg ten skraca znacząco czas oczekiwania na wyrównanie się poziomu wody z linią 0 cm³ w zbiorniku (5) dla kolejnego punktu pomiarowego.

5. Tabela wielkości mierzonych

Tabela wielkości pomiarowych do tego ćwiczenia zamieszczona jest na końcu instrukcji. Tabelę należy uzupełnić o jednostki wielkości mierzonych.

6. Opracowanie wyników pomiarów

Opracowanie wyników pomiarów należy wykonać zgodnie z poniższymi wytycznymi:

1) Dla każdego punktu pomiarowego wyznaczyć:

a) z równania (31) zmierzoną wartość współczynnika strat liniowych λ_R , zastępując prędkość równaniem ciągłości przepływu zawierającym zmierzoną objętość i czas napełnienia zbiornika mierniczego

$$\lambda_R = \frac{4V}{\pi d \tau v}, \quad (32)$$

b) wartość liczby Reynoldsa (1) zastępując prędkość równaniem ciągłości przepływu zawierającym zmierzoną objętość i czas napełnienia zbiornika mierniczego

$$Re = \frac{4q_v}{\pi d v}, \quad (33)$$

c) z równania (21) teoretyczną wartość współczynnika strat liniowych λ_T .

2) Sporządzić charakterystykę rzeczywistego oraz teoretycznego współczynnika strat liniowych w zależności od wartości liczby Reynoldsa.

3) Sporządzić charakterystykę wysokości straty liniowej na odcinku 1-4 dla wyznaczonego teoretycznego oraz rzeczywistego współczynnika strat liniowych.

7. Pytania kontrolne

1. Co to jest strata liniowa i w wyniku czego powstaje?
2. Jakie rodzaje sił działają na element przepływającego płynu?
3. Jaki rodzaj sił dominuje w przypadku przepływu laminarnego, a jaki w przypadku przepływu turbulentnego?
4. Stosunkiem jakich sił jest liczba Reynoldsa i podać wzór.
5. Co to jest przepływ Hagen–Poiseuille’a?
6. Co to jest prawo Hagen–Poiseuille’a?
7. Jaki jest rozkład prędkości w przypadku przepływu w rurze o przekroju kołowym?
8. Na czym polega metoda kompensacyjna i kiedy jest stosowana?
9. Do czego służy na i jakiej zasadzie działa zbiornik Mariotte’a.
10. Od której potęgi prędkości przepływu zależy liniowa strata ciśnienia w ruchu laminarnym?
11. Od której potęgi średnicy przewodu zależy liniowa strata ciśnienia w ruchu laminarnym?

Tabela pomiarowa do L9

Data wykonania pomiarów:.....

l.p.	V	τ	Δz_{14}	Δz_{34}	t_{woda}	l.p.	V	τ	Δz_{14}	Δz_{34}	t_{woda}
1.						10.					
2.						11.					
3.						12.					
4.						13.					
5.						14.					
6.						15.					
7.						16.					
8.						17.					
9.						18.					

Inne parametry		
Symbol	Jednostka	Wartość
l_{13}	mm	175,9
l_{34}	mm	276,4
d	mm	1,269

Sekcja nr			
Lp.	Nazwisko	Imię	Nr albumu
1.			
2.			
3.			

Data, podpis prowadzącego