



Politechnika Wrocławska

Wydział Mechaniczno-Energetyczny

---

---

## Ćwiczenie L15

### ***Wyznaczenie rozkładu prędkości w warstwie przyściennej***

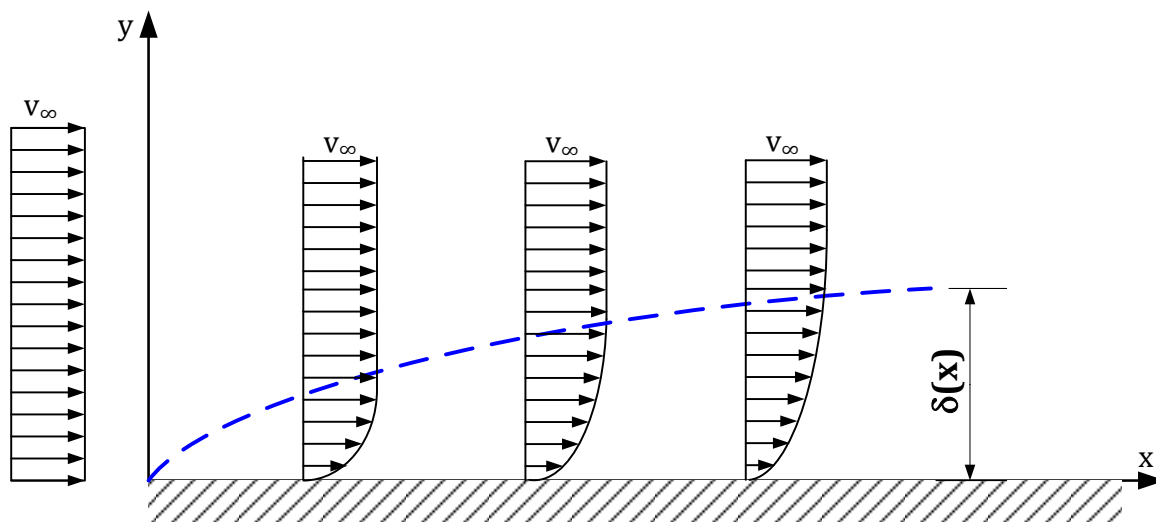
---

## 1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie rozkładu prędkości w warstwie przyściennej oraz obliczenie grubości warstwy w przypadku opływu ściany gładkiej i chropowatej.

## 2. Wstęp teoretyczny

Przy opływie ciała płynem np. powietrzem lub wodą, opływane ciało zaburza prędkość strugi płynu. Obszar, w którym następuje zaburzenie prędkości płynu nazywa się warstwą przyścienną, oznaczaną  $\delta$ . Jest to warstwa płynu bezpośrednio przylegająca do powierzchni opływającego ciała. Prędkość w warstwie przyściennej zmienia się od wartości równej 0 przy powierzchni ciała do wartości prędkości strugi niezakłóconej  $v_\infty$ , czyli prędkości płynu w odległości wystarczająco dużej od opływającego ciała. Wzdłuż opływanej powierzchni zmienia ulega grubość warstwy przyściennej  $\delta$ , która jest najmniejsza w początkowej części opływającego ciała (rys. 1). Zmianę grubości powoduje siła lepkości, która stopniowo spowalnia kolejne warstwy płynu.



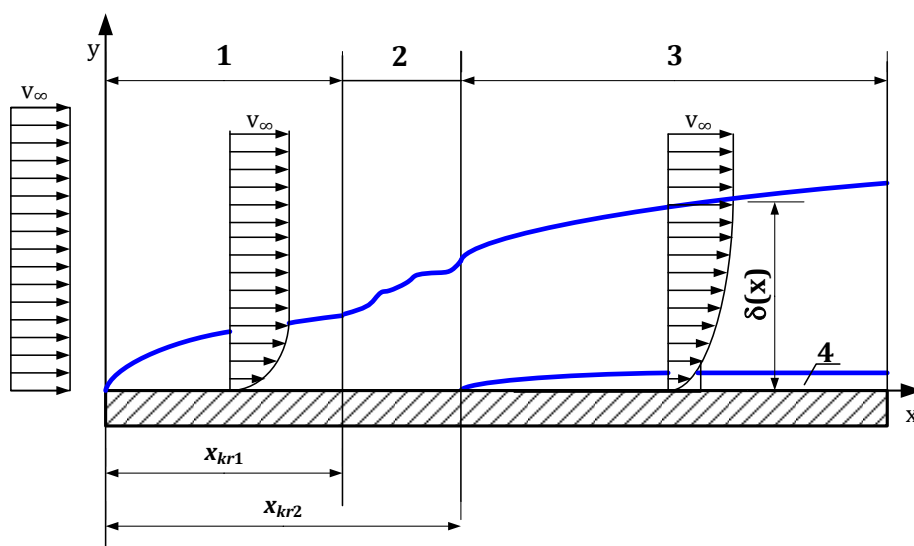
Rys. 1. Zmiana rozkładu prędkości i grubości warstwy przyściennej na opływanej powierzchni

Grubość warstwy przyściennej  $\delta$  zależy od wielu czynników, m.in. od: prędkości przepływu i lepkości płynu oraz kształtu opływającego ciała i chropowatości jego powierzchni. Grubość  $\delta$  zdefiniowana jest jako odległość w kierunku prostopadłym do opływanej powierzchni, w której prędkość strugi osiąga 99% prędkości strugi niezakłóconej  $v_\infty$ . W przypadku opływu płata powietrzem wynosi ona kilka milimetrów, a przy opływie wodą natomiast od kilku do kilkunastu centymetrów.

Wzdłuż przepływu ciśnienie w warstwie przyściennej zmienia się tak samo jak w obszarze poza nią. Stąd jeśli ciśnienie zewnętrzne jest stałe, to w warstwie przyściennej również pozostaje ono stałe. Natomiast w kierunku prostopadłym do opływanej powierzchni zmiany ciśnienia są praktycznie pomijalne, ze względu na jej małą grubość. Wyjątek stanowią przepływy z prędkościami zbliżonymi lub większymi niż liczba Macha, kiedy w wyniku wzrostu ciśnienia może nastąpić oderwanie warstwy przyściennej od opływanej powierzchni. W przypadku płatów aerodynamicznych taka sytuacja prowadzi

do zmniejszenia siły nośnej. Oderwanie warstwy przyściennej występuje wtedy, kiedy poruszający się płyn ma za małą energię kinetyczną potrzebną do pokonania wzrostu ciśnienia lub siły lepkości. W przypadku płatów aerodynamicznych oderwanie warstwy może wystąpić także dla zbyt dużej wartości kąta natarcia. Za miejscem oderwania warstwy powstaje strefa dodatkowych zawirowań, która znacząco wpływa na wzrost oporu przepływu.

Przepływ w warstwie przyściennej może być laminarny, przejściowy lub turbulentny (rys. 2). W przypadku przepływu laminarnego cząsteczki płynu poruszają się tylko ruchem wzdłużnym, który charakteryzuje się małymi oporami przepływu. W warstwie turbulentnej natomiast cząsteczki płynu oprócz ruchu wzdłużnego wykonują ruchy poprzeczne (fluktuacyjne). Wzrasta przez to opór przepływu. Natomiast w strefie przepływów przejściowych dochodzi do zmiany charakteru przepływu z laminarnego w turbulentny, co wpływa na zmianę rozkładu prędkości. Dodatkowo w strefie turbulentnej przy powierzchni występuje podwarstwa laminarna (4), która stopniowo przechodzi w warstwę turbulentną (3).



Rys. 2. Rodzaje stref w warstwie przyściennej: 1 – laminarna, 2 – przejściowa, 3 – turbulentna, 4 – podwarstwa laminarna (lepka).

Przejście pomiędzy strefami (1) i (2) oraz (2) i (3) definiują tzw. krytyczne liczby Reynoldsa  $Re_{kr1}$  (przejście pomiędzy strefą (1) i (2)) i  $Re_{kr2}$  (przejście pomiędzy strefą (2) i (3)), które zostały wyznaczone eksperymentalnie i zdefiniowane następująco:

$$Re_{kr1} = \frac{v_{\infty} x_{kr1}}{\nu}, \quad (1)$$

$$Re_{kr2} = \frac{v_{\infty} x_{kr2}}{\nu}, \quad (2)$$

gdzie:  $v_{\infty}$  – prędkość strugi niezakłóconej,  $x_{kr1}$  – długość wzdłuż osi x, dla której następuje przejście ze strefy laminarnej do strefy przejściowej,  $x_{kr2}$  – długość wzdłuż osi x, przy

której po przekroczeniu przepływ warstwa przyścienna ma charakter turbulentny,  $\nu$  – kinematyczny współczynnik lepkości płynu.

Krytyczne liczby Reynoldsa przy opływie płaskiej powierzchni ciała mieszczą się w przedziale od  $10^4$  do  $4 \cdot 10^6$ . W praktyce przyjmuje się jednak wartości  $Re_{kr1} \approx Re_{kr2} \approx 5 \cdot 10^5$ , co oznacza, że długość strefy przejściowej jest bardzo mała.

W celu wyznaczenia grubości warstwy przyściennej  $\delta$  i rozkładu prędkości w tej warstwie należy uwzględnić lepkość płynu i rozwiązać równanie Naviera–Stokesa dla odpowiedniego kierunku ruchu, które w uproszczonej postaci, zwane jest równaniem Prandtla (3)

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (3)$$

oraz równanie ciągłości przepływu w postaci (4)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Do rozwiązania powyższych równań zakłada się dwa warunki brzegowe (5) i (6). Pierwszy z nich (5) dotyczy prędkości cząstek płynu położonych bezpośrednio przy powierzchni opływającego ciała, dla których prędkość przepływu zakłada się równą zero

$$v_x = v_y = 0, \text{ dla } y = 0, \quad (5)$$

drugi warunek (6) zakłada, że wartość prędkości płynu poza warstwą przyścienną nie zmienia się w kierunku prostopadłym do opływanej powierzchni

$$\left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y>\delta} = 0, \quad (6)$$

czyli

$$v_x = v_\infty(x), \text{ dla } y \geq \delta. \quad (7)$$

Rozwiązanie tych równań jest skomplikowane, dlatego do obliczeń laminarnej jak i turbulentnej warstwy przyściennej wykorzystuje się przybliżone metody. Metody te wykorzystują tzw. związki całkowe Kármána (8), jednak do rozwiązania wymagają znajomości dwóch wielkości  $\delta^*$  i  $\delta^{**}$  np. otrzymanych z pomiarów

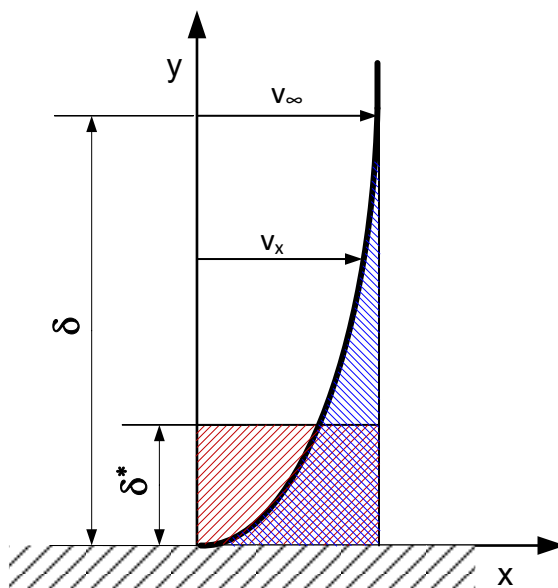
$$\frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \frac{1}{v_\infty} (2\delta^{**} + \delta^*) \frac{dv_\infty}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \delta^{**} = \frac{\tau}{\rho v_\infty^2}, \quad (8)$$

gdzie:  $\delta^*$  – grubość odsunięcia pędu,  $\delta^{**}$  – grubość straty pędu,  $\tau$  – naprężenie styczne na powierzchni płyty, wynikające z lepkości cieczy, które można opisać równaniem (9)

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \mu \frac{v_x}{\delta}. \quad (9)$$

Gdyby warstwa przyścienna nie istniała płyn mógłby poruszać się z prędkością  $v_\infty$ , aż do miejsca styku z opływającą powierzchnią. Oznacza to, że obecność warstwy przyściennej zmniejsza strumień masy przepływającego płynu. Wielkość  $\delta^*$  w równaniu (8) nazywa się grubością odsunięcia, która określa hipotetyczne przesunięcie opływanej powierzchni rekompensując wspomniany ubytek strumienia masy płynu (pole utraty

prędkości – kolor niebieski) (rys. 3). Utratę tę równoważy się polem o grubości  $\delta^*$  (kolor czerwony).



Rys. 3. Liniowa miara zmniejszenia strumienia masy.

Równość obu pól można zapisać w postaci równania

$$\delta^* v_{\infty} = \int_0^{\delta} (v_{\infty} - v_x) dy, \quad (10)$$

W którym prawa strona równania przedstawia pole utraty prędkości (kolor niebieski), a lewa natomiast pole równoważne o grubości odsunięcia pędu  $\delta^*$ .

Po obliczeniu z (10) grubości odsunięcia  $\delta^*$  otrzymamy

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_x}{v_{\infty}}\right) dy. \quad (11)$$

Poprzez rozwiązanie równania (11) otrzymamy grubość straty pędu w postaci

$$\delta^* = \frac{0,046x}{Re_x^{0,2}}. \quad (12)$$

gdzie:  $Re_x = \frac{\rho_p v_x L}{\mu}$ ,  $v_x$  – prędkość w warstwie przyściennej.

Grubość odsunięcia pędu  $\delta^*$  jest mniejsza niż grubość warstwy przyściennej i odpowiada za dodatkowy opór przepływu. Stąd przy projektowaniu płatów aerodynamicznych należy minimalizować wartość  $\delta^*$  w celu ograniczenia oporów ruchu.

Podobnie można zdefiniować wielkość  $\delta^*$ , nazywaną grubością straty pędu. Grubość straty pędu jest ilością pędu, który został utracony w warstwie przyściennej w porównaniu do przepływu płynu nielepkiego (idealnego). Definiując strumień pędu jako ilość pędu przeniesionego przez płyn w jednostce czasu przez określoną powierzchnię, strumień pędu płynu idealnego i rzeczywistego wynosi odpowiednio

$$P_{idealny} = \int_0^{\delta} \rho v_{\infty}^2 dy, \quad (13)$$

$$P_{rzecz} = \int_0^{\delta} \rho v_x^2 dy. \quad (14)$$

Utracona różnica strumieni pędu jest równa

$$P_{utracony} = \int_0^{\delta} \rho (v_{\infty}^2 - v_x^2) dy = \int_0^{\delta} \rho v_{\infty}^2 \left(1 - \frac{v_x^2}{v_{\infty}^2}\right) dy. \quad (15)$$

Grubość straty pędu zdefiniowana jest, jako wysokość warstwy, która przepływałaby z prędkością strugi niezakłóconej  $v_{\infty}$  i miała ten sam ubytek pędu

$$\rho v_{\infty}^2 \delta^{**} = \int_0^{\delta} \rho v_{\infty}^2 \left(1 - \frac{v_x^2}{v_{\infty}^2}\right) dy. \quad (16)$$

Po podzieleniu stronami przez  $\rho v_{\infty}^2$  i wyznaczeniu  $\delta^{**}$  otrzymamy

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{v_x}{v_{\infty}} \left(1 - \frac{v_x}{v_{\infty}}\right) dy. \quad (17)$$

Poprzez rozwiązanie równania (17) otrzymamy grubość straty pędu w postaci

$$\delta^{**} = \frac{0,036x}{Re_x^{0,2}}. \quad (18)$$

Grubość straty pędu określa, o ile hipotetycznie należałoby zmniejszyć strumień masy płynu, aby uwzględnić utratę pędu w warstwie przyściennej. Podobnie jak poprzednio przy projektowaniu płatów aerodynamicznych, wartość  $\delta^{**}$  należy minimalizować, co wpływa na lepszą aerodynamikę i mniejszy opór ruchu. Wzrost wartości  $\delta^{**}$  powoduje wzrost straty energii, co związane jest z rosnącym oporem ruchu, a także może prowadzić do oderwania warstwy przyściennej.

W celu wyliczenia z równania (9) naprężenia stycznego należy rozwiązać całkowite wyrażenia  $\delta^*$  (12) i  $\delta^{**}$  (17). Do tego celu niezbędna jest znajomość rozkładu prędkości w warstwie przyściennej. Założono, że rozkład prędkości w laminarnej warstwie przyściennej może być aproksymowany wielomianem trzeciego stopnia

$$v_x(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3. \quad (19)$$

Dla założonych warunków brzegowych (5) i (6) współczynniki wielomianu wynoszą

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{3}{2} \frac{v_{\infty}}{\delta}, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{2} \frac{v_{\infty}}{\delta^3}. \quad (20)$$

Po scałkowaniu wyrażenia na  $\delta^*$  (12) oraz  $\delta^{**}$  (17) uzyskuje się zależność na grubość laminarnej warstwy przyściennej

$$\delta_{lam} = 4,64 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} = 4,64 \sqrt{\frac{vx}{v_{\infty}}}. \quad (21)$$

We wzorze (21)  $Re_x$  jest lokalną liczbą Reynoldsa przedstawioną jako

$$Re_x = \frac{\rho v_{\infty} x}{\mu} \quad (22)$$

gdzie  $x$  jest wymiarem charakterystycznym liczonym wzdłuż badanej powierzchni, natomiast  $\mu$  dynamicznym współczynnikiem lepkości płynu. Dla rozpatrywanej powierzchni długość charakterystyczna  $x$  jest równa długości badanej powierzchni i wynosi  $L$ , stąd liczba Reynoldsa ma postać

$$Re_x = \frac{\rho v_\infty L}{\mu}. \quad (23)$$

Podobną zależność otrzymał Blassius na podstawie wykonanego eksperymentu, formułując równanie empiryczne na grubość laminarnej warstwy przyściennej

$$\delta_{lam} = 5 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} = 5 \sqrt{\frac{vx}{v_\infty}}. \quad (24)$$

Natomiast rozkład prędkości w turbulentnej warstwie przyściennej zgodnie z modelem Prandtla można aproksymować zależnością wykładniczą

$$v_x = v_\infty \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (25)$$

gdzie  $n = 7$ , dla przepływu w zakresie liczb Reynoldsa między  $5 \cdot 10^5 \leq Re \leq 1 \cdot 10^7$ . Po uwzględnieniu powyższych założeń, zależność opisująca grubość turbulentnej warstwy przyściennej, przyjmuje postać

$$\delta_{tur} = 0,376 \left( \frac{v}{v_\infty} \right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} = 0,376 \frac{x}{Re_x^{\frac{1}{5}}}. \quad (26)$$

### 3. Opis stanowiska

Stanowisko pomiarowe składa się z kanału z umieszczoną w nim płaską płytą o powierzchni gładkiej i chropowatej (7), wentylatora (2) z włącznikiem (1) oraz przepustnicy (3) do zmiany strumienia objętości powietrza. Ciśnienie całkowite mierzone jest przy pomocy rurki Pitota (8) podłączonej do manometru wieloramiennego (5).

### 4. Procedura badawcza

Wykonanie badań polega na:

- pomiarze wysokości ciśnienia całkowitego za pomocą rurki Pitota,
- pomiarze temperatury przepływającego powietrza oraz ciśnienia barometrycznego.

W celu wykonania pomiarów należy:

- zapoznać się z budową stanowiska i sporządzić jego schemat, na którym należy oznaczyć mierzone wielkości,
- z przyrządów pomiarowych odczytać jednostki i zapisać je w tabeli pomiarowej,
- zgłosić prowadzącemu gotowość do rozpoczęcia badań,
- przed włączeniem stanowiska sprawdzić czy przepustnica (3) jest w pozycji zamkniętej,
- poluzować śrubę mocującą rurkę Pitota i na mikrometrze ustawić wartość 15,14 mm dla powierzchni gładkiej,
- przysunąć rurkę Pitota do powierzchni płyty i zakręcić śrubę mocującą rurkę,
- podłączyć rurkę Pitota do manometru wielokanałowego,

- przy pomocy zbiorniczka z płynem manometrycznym na manometrze wielokanałowym ustawić początkową wysokość zwierciadła cieczy na 100 mm,
- uruchomić wentylator (2) za pomocą włącznika (1 – kolor czarny)
- otwierać przepustnicę (3) tak, aby wysokość ciśnienia całkowitego w komorze osiągnęła wartość ok 70 mm,
- odczytywać wartości ciśnienia całkowitego mierzonego przez rurkę Pitota dla ustawień śruby mikrometru podanych w tabeli pomiarowej,
- po wykonaniu pomiarów dla powierzchni gładkiej wyłączyć wentylator za pomocą włącznika (1 – kolor czerwony),
- poprosić prowadzącego o zmianę powierzchni gładkiej na chropowatą,
- poluzować śrubę mocującą rurkę Pitota i na mikrometrze ustawić wartość 16,10 mm dla powierzchni chropowatej,
- uruchomić wentylator (2) za pomocą włącznika (1 – kolor czarny)
- wykonać pomiary ciśnienia całkowitego mierzonego przez rurkę Pitota zgodnie z ustawieniami śruby mikrometru podanymi w tabeli pomiarowej dla powierzchni chropowatej,
- zamknąć przepustnicę (3),
- wyłączyć wentylator (1 – kolor czerwony).

## 5. Tabela wielkości mierzonych

Tabela wielkości pomiarowych do tego ćwiczenia zamieszczona jest na końcu instrukcji. Tabelę należy uzupełnić o jednostki wielkości mierzonych.

## 6. Opracowanie wyników pomiarów

Opracowanie wyników pomiarów należy wykonać zgodnie z poniższymi wytycznymi:

1. Obliczyć dynamiczny współczynnik lepkości, ciśnienie pary nasyconej oraz gęstość powietrza, na podstawie zmierzonego ciśnienia otoczenia, temperatury i wilgotności.

Dynamiczny współczynnik lepkości

$$\mu = \mu_0 \frac{273+C}{T+C} \left( \frac{T}{273} \right)^{\frac{3}{2}},$$

gdzie:  $\mu_0$  – dynamiczny współczynnik lepkości w temperaturze 273 K (dla powietrza  $\mu_0 = 17,08 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ); C – stała Sutherlanda (dla powietrza C = 112).

Ciśnienie pary nasyconej

$$p_{nas} = 9,8065 \cdot 10^5 e^{\frac{0,01028 \cdot T - \frac{7821,541}{T} + 82,86568}{T^{11,48776}}}.$$

Gęstość powietrza

$$\rho_p = \frac{1}{R_s} \frac{1 + \frac{0,622 \cdot \varphi \cdot p_{nas}}{p - \varphi \cdot p_{nas}}}{1 + \frac{\varphi \cdot p_{nas}}{p - \varphi \cdot p_{nas}}} \frac{p}{T}.$$

2. Policzyc stosunek prędkości  $v_x$  do prędkości strugi niezakłóconej  $v_\infty$ ,  $\frac{v_x}{v_\infty}$ , gdzie

$$p_x = h_c \rho_w g = \frac{1}{2} \rho v_x^2,$$

$$p_\infty = h_{c\infty} \rho_w g = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2,$$

gdzie  $\rho_w$  – gęstość płynu manometrycznego (wody).

Wysokość ciśnienia potrzebną do wyznaczenia prędkości strugi niezakłóconej odczytać z tabeli pomiarowej dla punktu odpowiadającego odległości 10 mm od badanej powierzchni

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \sqrt{\frac{h_c}{h_{c\infty}}}.$$

$$\text{Obliczyć prędkość strugi niezakłóconej } V_\infty = \sqrt{\frac{2p_{c\infty}}{\rho}}.$$

- Obliczyć doświadczalną liczbę Reynoldsa strugi niezakłóconej na podstawie równania (21) dla  $L = 265$  mm.
- Grubośći odsunięcia pędu  $\delta^*$  warstwy przyściennej obliczyć z równania (12).
- Grubość zmniejszenia strumienia pędu  $\delta^{**}$  warstwy przyściennej obliczyć z równania (18).
- W przeprowadzonym eksperymencie rodzaj przepływu w warstwie przyściennej jest turbulentny stąd jej grubość obliczyć z równania (26).
- Na podstawie otrzymanych wyników pomiarów, należy sporządzić charakterystykę odległości rurki Pitota od badanej powierzchni w funkcji stosunku prędkości  $v_x/v_\infty$ . Na jednej charakterystyce narysować krzywe dla ściany płaskiej i chropowatej.
- Porównać dla obu badanych powierzchni wielkości  $\delta$ ,  $\delta^*$ ,  $\delta^{**}$ .

## 7. Pytania kontrolne

- Co to jest warstwa przyścienna?
- Co to jest grubość warstwy przyściennej?
- Po czym można rozróżnić charakter przepływu w warstwie przyściennej?
- Narysuj rozkład prędkości dla laminarnej warstwy przyściennej na płaskiej płycie.
- Podać wzór na grubość laminarnej warstwy przyściennej.
- Podać wzór na naprężenie styczne na ścianie w laminarnej warstwie przyściennej.
- Narysować rozkład prędkości w turbulentnej warstwie przyściennej.
- Opisz co to jest liniowa miara zmniejszenia strumienia masy i od czego zależy?
- Opisz co to jest liniowa miara zmniejszenia strumienia pędu i od czego zależy?

Tabela pomiarowa do L15

Powierzchnia gładka			
	$y_m$	$y$	$h_c$
L.p.	mm	mm	
1.	15,14	0,20	
2.	15,20	0,26	
3.	15,40	0,46	
4.	15,60	0,66	
5.	15,80	0,86	
6.	16,00	1,06	
7.	16,50	1,56	
8.	17,00	2,06	
9.	18,00	3,06	
10.	19,00	4,06	
11.	20,00	5,06	
12.	21,00	6,06	

Powierzchnia chropowata			
	$y_m$	$y$	$h_c$
L.p.	mm	mm	
1.	16,1	0,2	
2.	16,3	0,4	
3.	16,5	0,6	
4.	17,0	1,1	
5.	17,5	1,6	
6.	18,0	2,1	
7.	18,5	2,6	
8.	19,0	3,1	
9.	20,0	4,1	
10.	21,0	5,1	
11.	22,0	6,1	
12.	23,0	7,1	
13.	24,0	8,1	
14.	25,0	9,1	

## Warunki pomiaru i wielkości stałe

Symbol	Jednostka	Wartość
$T$	$^{\circ}\text{C}$	
$p_b$	hPa	
$L$	mm	265

## Sekcja nr

Lp.	Nazwisko	Imię	Nr albumu
1.			
2.			
3.			
4.			

Data, podpis prowadzącego