



Politechnika Wrocławska

Wydział Mechaniczno-Energetyczny

---

## Ćwiczenie L3

# ***PROFIL PRĘDKOŚCI W PRZEWODZIE PROSTOOSIOWYM***

---

## 1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie rozkładu prędkości w przewodzie prostoosiowym i porównanie go z rozkładem otrzymanym z modelu matematycznego.

## 2. Wstęp teoretyczny

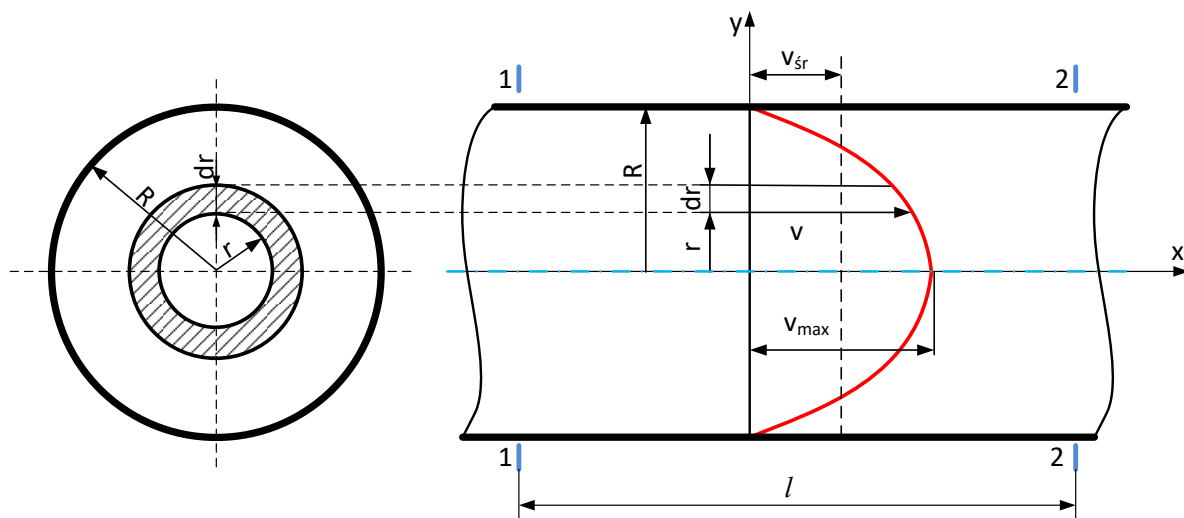
Profil prędkości jest to funkcja przedstawiająca zależność prędkości przepływu dla różnych w różnych odległościach od osi przewodu. Kształt profilu prędkości przepływu płynu zależy od rodzaju przepływu czyli tego czy ruch jest laminarny czy turbulentny.

### 2.1. Profil prędkości w przepływie laminarnym

W przewodzie o prostoosiowym o przekroju kołowym wybieramy dwa przekroje poprzeczne oddalone od siebie o odległość  $l$  (rys. 1). Pomiędzy wybranymi przekrojami występuje różnica ciśnień  $\Delta p$  powodująca przepływ. W stanie ustalonym siła ciśnieniowa wywołana różnicą ciśnień  $\Delta p$  jest równoważona przez siłę tarcia wewnętrznego. Warunek równowagi sił przedstawia równanie

$$F_{p1} - F_{p2} - F_t = 0, \quad (1)$$

gdzie:  $F_{p1}$ ,  $F_{p2}$  – siły ciśnieniowe w przekroju 1 i 2,  $F_t$  – siła tarcia wewnętrznego.



Rys. 1. Profil prędkości w przewodzie w ruchu laminarnym.

Siły ciśnieniowe zastąpienie zostaną zgodnie z definicją ciśnienia iloczynem ciśnienia i pola powierzchni, natomiast siła tarcia wewnętrznego obliczona zostanie ze wzoru Newtona

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy}, \quad (2)$$

gdzie:  $\tau$  – naprężenie styczne,  $\mu$  – dynamiczny współczynnik lepkości,  $\frac{dv}{dy}$  – szybkość ścinania (pochodna prędkości w kierunku normalnym do kierunku przepływu).

Wzór (1) ma wówczas postać

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 - \tau S = 0. \quad (3)$$

Dla przewodu o przekroju kołowym pola powierzchni  $A_1$  i  $A_2$  to pola przekroju poprzecznego walca o promieniu  $r$ , natomiast pole powierzchni  $S$  to pole powierzchni bocznej walca o promieniu  $r$  i długości  $l$ . Wzór (3) przyjmuje wówczas postać

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi r l = 0. \quad (4)$$

Po podstawieniu do (4) równania (2) i zastąpieniu różnicy ciśnień przyrostem  $\Delta p$  otrzymamy

$$\Delta p \pi r^2 + \mu \frac{dv}{dy} 2\pi r l = 0. \quad (5)$$

Po przekształceniu i uproszczeniu (5) otrzymamy

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\mu l} r dy. \quad (6)$$

Po dwustronnym scałkowaniu równanie (6) ma postać

$$v = -\frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + C, \quad (7)$$

gdzie  $C$  jest stałą całkowania zależną od warunku brzegowego.

Jako warunek brzegowy przyjmujemy, że prędkość przy ścianie przewodu wynosi 0 czyli dla  $r=R$ ,  $v=0$ .

Stąd stała  $C$  jest równa

$$C = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2 \quad (8)$$

i po podstawieniu do (7) otrzymamy wzór na profil prędkości dla przepływu laminarnego

$$v = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2). \quad (9)$$

Z równania (9) wynika, że profil prędkości w przepływie laminarnym przyjmuje kształt paraboli, a wzór nosi nazwę Hagena-Poiseuille'a.

Prędkość maksymalna występuje w osi przewodu i może zostać obliczona przez podstawienie za  $r=0$

$$v_{\max} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta p}{\mu l} \cdot R^2. \quad (10)$$

Liczbowo objętość paraboloidy obrotowej z rys. 1 jest równa strumieniowi objętości. Elementarny strumień objętości przepływający przez elementarną powierzchnię będącą pierścieniem o promieniu  $r$  i szerokości  $dr$  wynosi

$$dq_v = v \, 2\pi r \, dr. \quad (11)$$

Po podstawieniu wyznaczonego wcześniej profilu prędkości (9) do (11)

$$dq_v = \frac{\pi \Delta p}{2\mu l} r (R^2 - r^2) \, dr. \quad (12)$$

Strumień objętości otrzymamy po obliczeniu całki oznaczonej po promieniu w granicach od 0 do  $R$

$$q_v = \frac{\pi \Delta p}{2\mu l} \int_0^R r (R^2 - r^2) \, dr, \quad (13)$$

ostatecznie

$$q_v = \frac{\pi \Delta p}{8\mu l} R^4. \quad (14)$$

Korzystając z równania ciągłości przepływu wyznaczono średnią prędkość przepływu

$$v_{sr} = \frac{q_v}{A} = \frac{q_v}{\pi R^2}. \quad (15)$$

Po podstawieniu (14) do (15) średnia prędkość jest równa

$$v_{sr} = \frac{\Delta p}{8\mu l} R^2. \quad (16)$$

Stosunek  $v_{sr}/v_{\max}$  wyznaczony zostanie po uwzględnieniu równania (10)

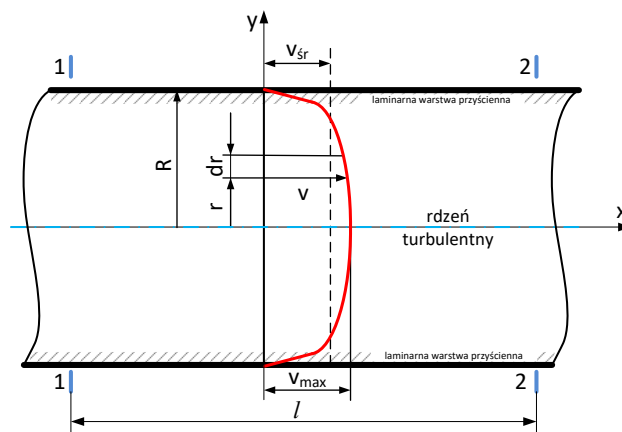
$$\frac{v_{sr}}{v_{\max}} = \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Stąd w przepływie laminarnym średnia prędkość przepływu jest połową prędkości maksymalnej

$$v_{sr} = \frac{1}{2} v_{\max}. \quad (18)$$

## 2.2. Profil prędkości w przepływie turbulentnym

W praktyce najczęściej występuje przepływ turbulentny. W przepływie turbulentnym można wydzielić dwie strefy: laminarną warstwę przyścienną i rdzeń turbulentny (rys. 2).



Rys. 2. Profil prędkości w przewodzie w ruchu turbulentnym.

Przyjmuje się, że w laminarnej warstwie przyściennej naprężenia styczne  $\tau_0$  są stałe. Wychodząc ze wzoru Newtona

$$\tau = \tau_0 = -\mu \frac{dv}{dy}, \quad (19)$$

stąd

$$dv = -\frac{\tau_0}{\mu} dy. \quad (20)$$

Po dwustronnym scałkowaniu równania (20) otrzymamy

$$v = -\frac{\tau_0}{\mu} y. \quad (21)$$

Z równania (21) wynika, że profil prędkości w laminarnej warstwie przyściennej jest liniowy i zależy od dynamicznego współczynnika lepkości czyli rodzaju płynu, a także parametrów stanu (ciśnienia, temperatury).

W ruchu turbulentnym oprócz składowej prędkości związanej z głównym ruchem jest jeszcze składowa ruchu pobocznego (tzw. składowa fluktuacyjna). Obecność tej składowej prowadzi to do intensywnej wymiany masy i pędu pomiędzy warstwami płynu i powstawanie tzw. naprężeń turbulentnych. Boussinesq przyjął hipotezę [1], że naprężenia turbulentne można wyznaczyć przez analogię do wzoru Newtona (19)

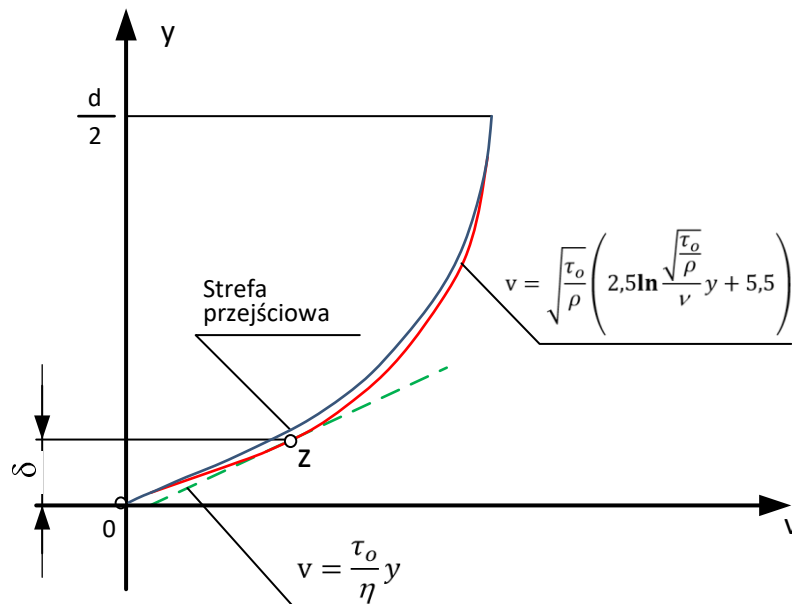
$$\tau_t = \mu_t \frac{d\bar{v}}{dy}, \quad (22)$$

gdzie:  $\mu_t$  – dynamiczny współczynnik lepkości turbulentnej,  $\bar{v}$  – uśredniona prędkość.

Według Prandtla turbulencja jest efektem poprzecznego przemieszczenia się cząstki płynu, podczas którego cząstka zachowuje swoją prędkość oraz pęd. Długość  $l$  poprzecznego przemieszczenia nazwał drogą mieszania. Takie założenie pozwoliło na określenie dynamicznego współczynnika lepkości turbulentnej jako

$$\mu_t = \rho l^2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2, \quad (23)$$

gdzie:  $l$  – tzw. droga mieszania podczas,  $v_x$  – składowa prędkości ruchu głównego.



Rys. 3. Rozkład prędkości w podwarstwie laminarnej i rdzeniu burzliwym,  $y=R-r$  (odległość od ścianki w przewodzie o przekroju kołowym).

Po złożonych przekształceniach, z uwzględnieniem hipotezy Prandtla dotyczącej tzw. drogi mieszania uzyskano wzór opisujący profil prędkości w rdzeniu turbulentnym

$$v = v^* \left( \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v^* y}{\nu} + \beta - \frac{1}{\kappa} \ln \beta \right), \quad (24)$$

gdzie:  $v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$  - prędkość tarcia.

Dla przewodu o przekroju kołowym stałe  $\kappa$  i  $\beta$  zostały wyznaczone eksperymentalnie i wynoszą odpowiednio 0,4 i 11,5. Wyznaczone stałe  $\kappa$  i  $\beta$  są praktycznie niezależne od liczby Reynoldsa. Po ich podstawieniu do (24) otrzymano

$$v = v^* \left( 2,5 \ln \frac{v^* y}{\nu} + 5,5 \right). \quad (25)$$

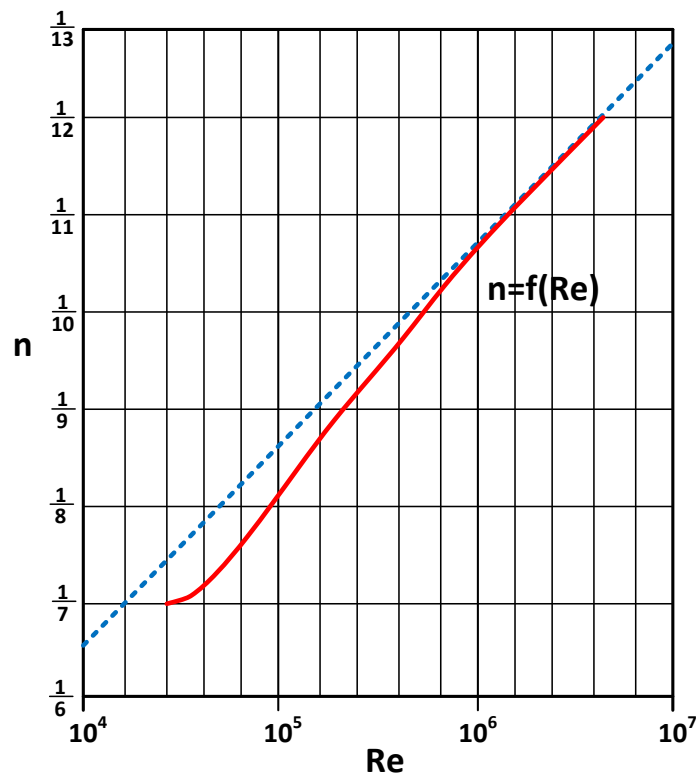
Z równania (25) wynika, że profil prędkości w rdzeniu turbulentnym jest opisany funkcją logarytmiczną. Profil opisany powyższym równaniem nazywany jest **uniwersalnym profilem prędkości**.

Profil prędkości opisany równaniem (25) jest dosyć skomplikowany, więc w praktyce niejednokrotnie stosuje się modele uproszczone. Jednym z nich jest model potęgowy Prandtla opisujący rozkład prędkości w przepływie turbulentnym (26). Jest to tzw. model Prandtla, który jest łatwy do rozwiązania

$$v = v_{\max} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (26)$$

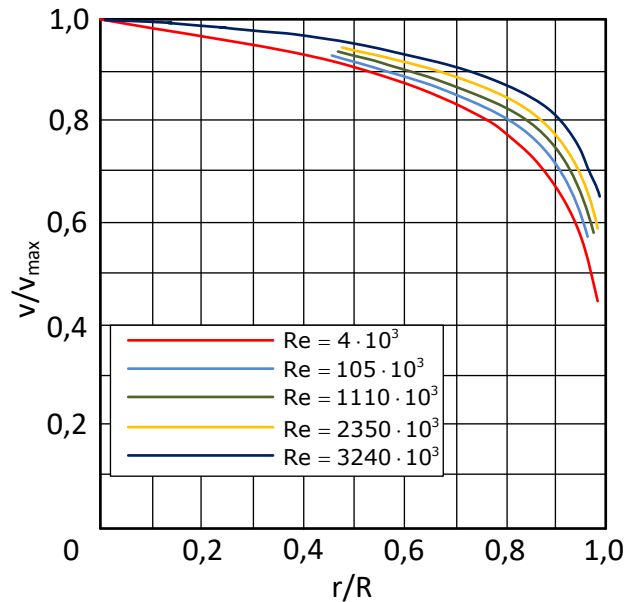
gdzie:  $R$  – promień przewodu,  $r \in [0, R]$ ,  $n$  – współczynnik zależny od liczby Reynoldsa wyznaczany z równania  $n = 2,1 \cdot \log Re - 1,9$ .

Zależność współczynnika  $n$  od liczby Reynoldsa przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Zależność  $n=f(Re)$ .

Na rys. 5 przedstawiono rozkład prędkości w zależności od liczby Reynoldsa wykonany na podstawie badań przeprowadzonych przez Nikuradsego.



Rys. 5. Profile prędkości dla różnych wartości Re.

Ostatecznie po przekształceniu wzoru (26) otrzymujemy zależność do sporządzenia charakterystyki teoretycznej w wartościach względnych

$$\left(\frac{v}{v_{max}}\right)_{teor} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2,1 \cdot \log Re - 1,9}}. \quad (27)$$

Powyższa formuła wyrażona jest w wartościach względnych, ma to na celu zachowanie kształtu przebiegu krzywej niezależnie od wartości prędkości.

Z równania (27) wynika, że do obliczeń potrzebna jest wartość liczby Re, którą wyznaczamy ze równania

$$Re = \frac{v_{sr} \cdot D \cdot \rho_p}{\mu}, \quad (28)$$

gdzie:  $D$  – średnica przewodu,  $\rho_p$  – gęstość powietrza,  $\mu$  – dynamiczny współczynnik lepkości,  $v_{sr}$  – prędkość średnia.

Obliczenie prędkości średniej  $v_{sr}$  należy przeprowadzić zgodnie z Polską normą, według, której pole przekroju przewodu należy podzielić na pierścienie o równych polach (liczba pierścieni jest zależna od średnicy badanego przewodu) w tym przypadku są to 4 pierścienie. W środku każdego z tych pól dokonujemy pomiaru prędkości, a ich sumę należy podzielić przez ich liczbę, czyli w tym przypadku 4 daje, stąd



$$v_{sr} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 v_i = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4} . \quad (29)$$

Jednym z najprostszych sposobów pomiaru prędkości miejscowej jest zastosowanie rurek piętzących. **Rurka piętząca** jest to rurka, w której energia kinetyczna cieczy przemieniana jest w energię ciśnienia, co dzięki odpowiedniemu ukształtowaniu rurki umożliwia pomiar ciśnienia lub spadku ciśnienia.

**Rurka Pitota** –składa się z koncentrycznej rurki, z częścią wygiętą pod kątem prostym (głowicą) tak, że rurka jest zwrócona czołem w kierunku dopływającego płynu, po jej umieszczeniu wewnątrz kanału. Jest to przyrząd do pomiaru ciśnienia całkowitego  $p_c$ , a przy przepływie płynów stosowany również do wyznaczania prędkości przepływu.

$$p_c = p_s + p_d, \quad (30)$$

gdzie:  $p_s$  – ciśnienie statyczne,  $p_d$  – ciśnienie dynamiczne.

Aby wyznaczyć prędkość musimy wyznaczyć ciśnienie dynamiczne. Rurka Pitota mierzy ciśnienie całkowite, więc potrzebne jest jeszcze ciśnienie statyczne  $p_s$ , które możemy zmierzyć na ścianie rury. Otwór na ścianie musi być w jednej osi (rys. 6) z czołem rurki Pitota. Mając zmierzone  $p_c$  i  $p_s$  można obliczyć  $p_d$

$$p_d = p_c - p_s, \quad (31)$$

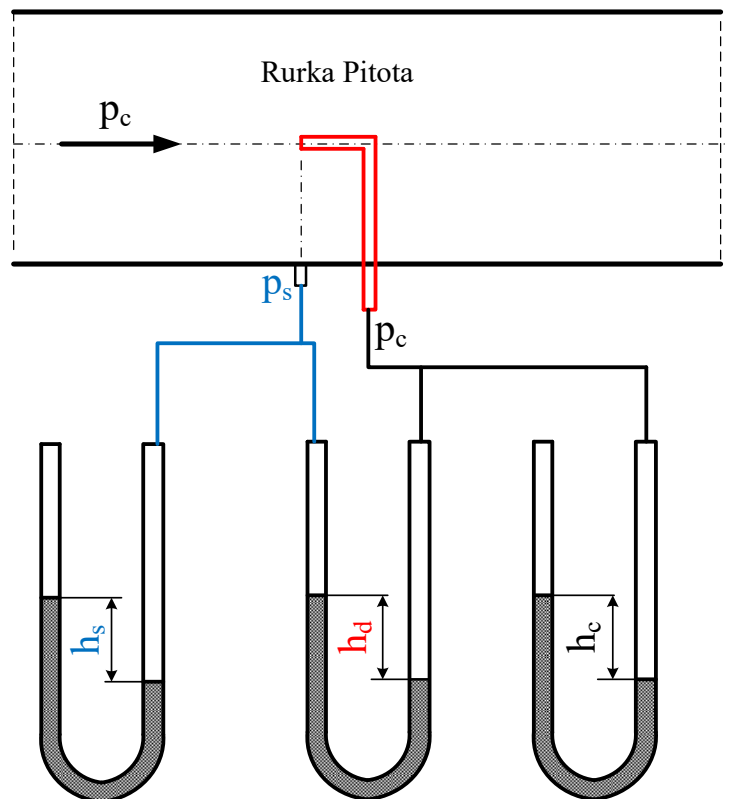
gdzie:  $p_s$  – ciśnienie statyczne,  $p_c$  – ciśnienie całkowite.

Ze wzoru definicyjnego ciśnienia dynamicznego

$$p_d = \frac{\rho v^2}{2}, \quad (32)$$

po przekształceniu otrzymujemy zależność na obliczenie prędkości

$$v = \sqrt{\frac{2p_d}{\rho}}. \quad (33)$$



Rys. 6. Różne układy pomiaru za pomocą rurki Pitota

Zmierzona wysokość prędkości  $h_d$  (rys. 6), umożliwia obliczenie ciśnienia dynamicznego

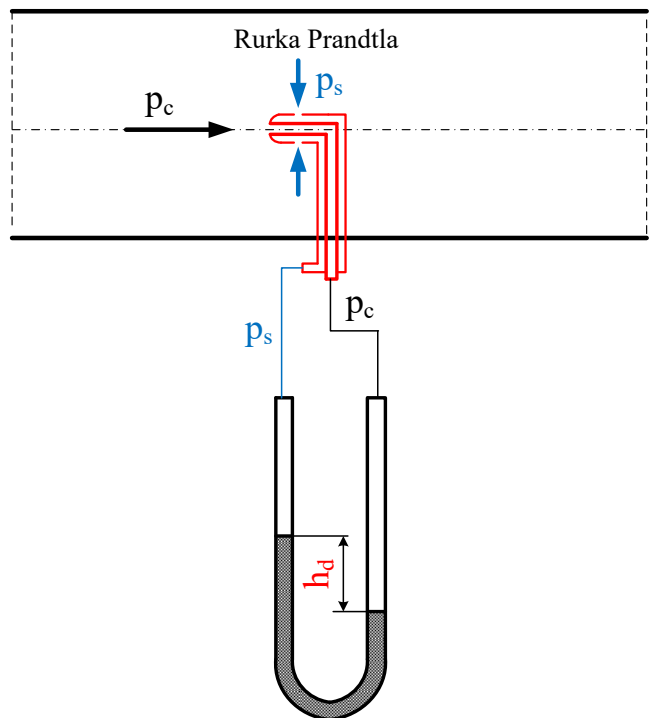
$$p_d = \rho_w g h_d, \quad (34)$$

gdzie:  $p_d$ -ciśnienie dynamiczne,  $\rho_w$ -gęstość cieczy manometrycznej,  $h_d$ -wysokość prędkości.

Po podstawieniu wzoru (34) do (33) otrzymujemy zależność na wyznaczenie prędkości

$$v = \sqrt{\frac{2 h_d g \rho_w}{\rho_p}}. \quad (35)$$

**Rurka Prandtla** – przyrząd do pomiaru prędkości przepływu płynu poprzez pomiar ciśnienia dynamicznego w przepływającym płynie. Za pomocą rurki Prandtla odpowiednio podłączonej do manometru można zmierzyć  $p_c$ ,  $p_s$ ,  $p_d$  (rys. 7). Zbudowana jest z dwóch osadzonych w sobie rurek, z czego pierwsza wewnętrzna służy do pomiaru ciśnienia całkowitego płynu, natomiast zewnętrzna do pomiaru ciśnienia statycznego.



Rys. 7. Pomiar ciśnienia dynamicznego za pomocą rurki Prandtla.

### 3. Opis stanowiska

Stanowisko składa się następujących elementów:

- Przewodu z przezroczystego tworzywa (1), przez który dmuchawa (2) tłoczy powietrze o regulowanym strumieniu objętości  $q_v$ .
- Rurki Pitota zamontowanej na prowadnicy z noniusem (3). Umiejscowioną na prowadnicy rurkę Pitota można przesuwając w kierunku promieniowym oraz wykonać pomiar rzędnej położenia osi tej rurki względem osi przewodu.
- Mikromanometru różnicowego M (4).
- Manometru  $M_R$  (5) do pomiaru ciśnienia różnicowego względnego, które jest mierzone na ścianie przewodu.
- Termometru (6).

### 4. Procedura badawcza

Zapoznać się z budową stanowiska i sporządzić jego schemat, na którym należy zaznaczyć opisane w pkt. 3 elementy.

W celu uruchomienia stanowiska badawczego i przeprowadzenia pomiarów należy:

1. Włączyć wentylator (2).

2. Odczytać wskazanie manometru różnicowego  $M_R$  (5) (ciśnienie statyczne  $p_s$ ) – odczyt jednorazowy. Ciśnienie względne w przewodzie mierzone jest za pomocą manometru dwuramiennego, z jednej strony połączonego z atmosferą, z drugiej zaś z króćcem bocznym.
3. Odczytać parametry otoczenia (temperatura  $t_0$ , ciśnienie barometryczne  $p_b$ , wilgotność) - odczyt jednorazowy.
4. Ustawić na noniuszu 66,0 mm (3), w tym położeniu rurka Pitota znajduje się w pierwszym punkcie pomiarowym, 1 mm od ścianki przewodu, której średnica wynosi 80 mm.
5. Po ustawieniu rurki Pitota w położeniu 1 mm od ścianki przewodu odczytać wysokość ciśnienia wskazywaną przez manometr M (4). Jest to pierwszy pomiar.
6. Dalsze 19 pomiarów wykonujemy z krokiem podanym w tabeli pomiarowej nr 1.
7. Wykonać pomiary wysokości ciśnienia i odczytać na manometrze M, dla 4 promieni podanych w tabeli nr 2. Są to wielkości potrzebne do obliczenia prędkości średniej.

*Podczas przesuwania linijki **Li** nie wolno naciskać na rurkę Pitota. Linijkę przesuwając posługując się śrubą z gwintem drobnozwojowym oraz specjalną podkładką stopniowaną: 10, 20, 30 mm.*

## 5. Tabela wielkości mierzonych

Tabela wielkości pomiarowych do tego ćwiczenia zamieszczona jest na końcu instrukcji. Tabelę należy uzupełnić o jednostki wielkości mierzonych.

## 6. Opracowanie wyników pomiarów

Opracowanie wyników pomiarów należy wykonać zgodnie z poniższymi wytycznymi:

- 1) Na podstawie zapisanych warunków otoczenia, obliczyć ciśnienie pary nasyconej, gęstość powietrza oraz dynamiczny współczynnik lepkości.

Ciśnienie pary nasyconej

$$p_{nas} = 9,8065 \cdot 10^5 e^{\frac{0,01028 \cdot T - \frac{7821,541}{T} + 82,86568}{T^{11,48776}}}.$$

Gęstość powietrza

$$\rho_p = \frac{1}{R_s} \frac{1 + \frac{0,622 \cdot \varphi \cdot p_{nas}}{p - \varphi \cdot p_{nas}}}{1 + \frac{\varphi \cdot p_{nas}}{p - \varphi \cdot p_{nas}}} \frac{p}{T}.$$

Dynamiczny współczynnik lepkości

$$\mu = \mu_0 \frac{273 + C}{T + C} \left( \frac{T}{273} \right)^{\frac{3}{2}},$$

gdzie:  $\mu_0$  – dynamiczny współczynnik lepkości w temperaturze 273 K (dla powietrza  $\mu_0 = 17,08 \cdot 10^{-6} \text{Pa} \cdot \text{s}$ );  $C$  – stała Sutherlanda (dla powietrza  $C = 112$ ).

- 2) Na podstawie danych pomiarowych dla każdego z punktów pomiarowych obliczyć prędkość  $v$ , korzystając z zależności (35).
- 3) Z obliczonych w poprzednim punkcie wartości prędkości  $v$ , znaleźć największą prędkość  $v_{\max}$ . W następnej kolumnie zapisujemy wartości  $v/v_{\max}$ .
- 4) Wyznaczyć ze wzoru (29)  $v_{\text{sr}}$  (na podstawie zmierzonych wartości  $v$  dla 4 promieni).
- 5) Wyznaczyć wartość liczby Reynoldsa.
- 6) Przedstawić graficznie profil prędkości we współrzędnych bezwymiarowych

$$\frac{v}{v_{\max}} = f\left(\frac{r}{R}\right).$$

- 7) Sporządzić charakterystykę teoretyczną (linia ciągła), korzystając ze wzoru (27).
- 8) Odczyty wskazań przyrządów oraz wyniki obliczeń należy zestawić w tablicy pomiarowej.

## 7. Pytania kontrolne

- 1) Różnice w profilu dla przepływu laminarnego i turbulentnego.
- 2) Co to jest ciśnienie całkowite?
- 3) Gdzie mierzymy ciśnienie statyczne?
- 4) Wzór na ciśnienie dynamiczne.
- 5) Budowa rurki Pitota.
- 6) Co mierzy rurka Pitota?
- 7) Schemat połączeń rurki Pitota w układzie do pomiaru wysokości ciśnienia dynamicznego.
- 8) Rurka Prandtla, budowa?
- 9) Co mierzy rurka Prandtla?
- 10) Z jakiego wzoru liczymy liczbę Reynoldsa?

Literatura

[\[1\] Krystyna Jeżowiecka-Kabsch, Henryk Szewczyk, Mechanika Płynów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001](#)

Tabela pomiarowa do L3Data wykonania pomiarów:.....

Tabela pomiarowa do rozkładu prędkości

Lp	Li	r	$\Delta h$	t	Lp	Li	r	$\Delta h$	t
	mm	mm				mm	mm		
1	66,0	39,0			11	51,0	24		
2	65,0	38,0			12	49,0	22		
3	64,0	37,0			13	47,0	20		
4	63,0	36,0			14	45,0	18		
5	61,5	34,5			15	43,0	16		
6	60,0	33,0			16	41,0	14		
7	58,5	31,5			17	38,0	11		
8	57,0	30			18	35,0	8		
9	55,0	28			19	32,0	5,0		
10	53,0	26			20	29,0	2,0		
					21	27,0	0,0		

Tabela do wyznaczenia prędkości średniej

Pomiar ciśnienia statycznego.  $p_s = \dots\dots\dots$	i	1	2	3	4
	$r_i/R$	0,331	0,612	0,800	0,950
	$\Delta h$				

Warunki pomiaru		
Symbol	Jednostka	Wartość
$p_b$	hPa	
$\varphi$	%	

Sekcja nr			
Lp.	Nazwisko	Imię	Nr albumu
1.			
2.			
3.			
4.			

Data, podpis prowadzącego