



Politechnika Wrocławska

Wydział Mechaniczno-Energetyczny

---

## Ćwiczenie L13

# ***RÓWNANIE BERNOULLIEGO ORAZ RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI PRZEPŁYWU***

---

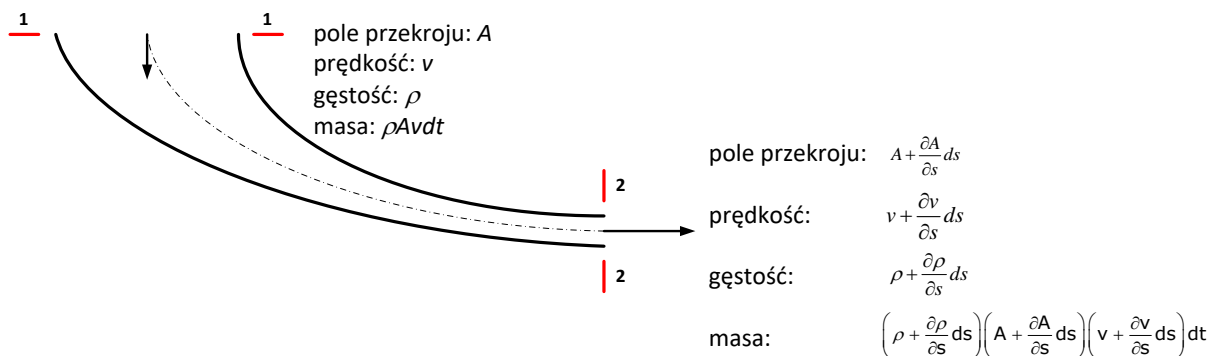
## 1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest pomiar rozkładu prędkości i ciśnienia w zwężeniu oraz porównanie otrzymanych wyników pomiarów z wartościami otrzymanymi z równania Bernoulliego i równania ciągłości przepływu.

## 2. Wstęp teoretyczny

### 2.1. Równanie ciągłości przepływu

Założmy, że przepływ jest jednowymiarowy tj. w przekroju poprzecznym strugi parametry charakteryzujące przepływ są stałe, natomiast ulegają zmianie tylko od jednej współrzędnej położenia. W przepływającej strudze płynu wybieramy dwa przekroje (rys. 1) i dla każdego przekroju określamy pole przekroju  $A$ , prędkość przepływu płynu  $v$ , gęstość płynu  $\rho$ . Przekroje 1 i 2 oddalone są od siebie o odległość  $ds$  mierzoną wzdłuż osi przepływu.



Rys. 1. Parametry strugi w przekrojach 1 i 2

Parametry przepływu zmieniają się na drodze  $ds$  i w przekroju 2 będą większe o iloczyn szybkości zmiany danego parametru (pochodna po drodze  $s$ ) oraz długości odcinka  $ds$ , w stosunku do tych w przekroju 1. Pole przekroju przepływu wyniesie  $A + \frac{\partial A}{\partial s} ds$ , prędkość  $v + \frac{\partial v}{\partial s} ds$ , a gęstość  $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds$ . Na podstawie tak zdefiniowanych parametrów można określić przepływającą masę płynu w jednostce czasu przez dany przekrój poprzeczny strugi. Będzie ona równa iloczynowi gęstości płynu, pola przekroju, prędkości

przepływu i czasu. Stąd przez przekrój 1 przepłynie masa płynu równa  $\rho A v dt$ , natomiast przez przekrój 2  $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds\right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} ds\right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right) dt$ .

Jeśli założymy, że struga jest ciągła, to różnica pomiędzy masą przepływającą przez przekrój 1 i 2 spowodowana jest zmianą gęstości płynu w tych przekrojach i wynosi  $\frac{d\rho}{dt} A ds dt$ .

Stąd możemy zapisać bilans masy w przekroju 1 i 2 w postaci

$$\frac{d\rho}{dt} A ds dt = \rho v A dt - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds\right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} ds\right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right) dt \quad (1)$$

Po wymnożeniu członów w nawiasach oraz pominięciu wielkości małych wyższego rzędu otrzymamy

$$A \frac{d\rho}{dt} + \rho v \frac{\partial A}{\partial s} + A v \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho A \frac{\partial v}{\partial s} = 0. \quad (2)$$

Trzy ostatnie człony równania (2) przedstawiają różniczkę iloczynu, stąd równanie to możemy zapisać w postaci

$$A \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho v A)}{\partial s} = 0. \quad (3)$$

Jeśli dodatkowo założymy, że przepływ jest stacjonarny, czyli wszystkie jego parametry nie zależą od czasu, w tym także gęstość, to pochodna gęstości po czasie wynosi 0, a równanie przyjmuje postać

$$\frac{\partial(\rho v A)}{\partial s} = 0. \quad (4)$$

Zgodnie z zasadami różniczkowania tylko pochodna wartości stałej wynosi 0, stąd otrzymujemy, iloczyn

$$\rho v A = \text{const.} \quad (5)$$

Jest to równanie ciągłości (5) przepływu płynu ściśliwego tzn. takiego, w którym pod wpływem parametrów stanu (temperatury, ciśnienia) zmianie ulega gęstość płynu. Z równania tego wynika, że w dowolnie wybranym przekroju iloczyn gęstości płynu, prędkości przepływu oraz pola przekroju poprzecznego jest zawsze stały. W praktyce równanie to ma zastosowanie do wszystkich gazów, które wykazują dużą podatność na zmianę objętości spowodowanej zmianami ciśnienia.

Jeśli założymy, że w przekrojach 1 i 2 gęstość płynu nie ulega zmianie to równanie (5) możemy stronami podzielić przez  $\rho$  otrzymując

$$vA = \text{const.} \quad (6)$$

Jest to równanie ciągłości przepływu płynu nieściśliwego, czyli takiego, który nie wykazuje zmiany objętości, a także zmiany gęstości.

Jednostką równania ciągłości  $\rho vA$  jest kg/s, stąd na tej podstawie zdefiniowano wielkość i nazywa strumieniem masy

$$q_m = \rho vA \quad (7)$$

Z kolei jednostką równania  $vA$  jest  $\text{m}^3/\text{s}$ , a zdefiniowana w ten sposób wielkość nazywa się strumieniem objętości

$$q_v = vA \quad (8)$$

Zatem strumień masy określa masę płynu przepływającą w jednostce czasu,

$$q_m = \frac{m}{t}, \quad (9)$$

natomiast strumień objętości – objętość płynu przepływającą w jednostce czasu

$$q_v = \frac{V}{t}. \quad (10)$$

Strumień objętości i strumień masy powiązane są ze sobą poprzez gęstość płynu.

$$q_m = \rho q_v \quad (11)$$

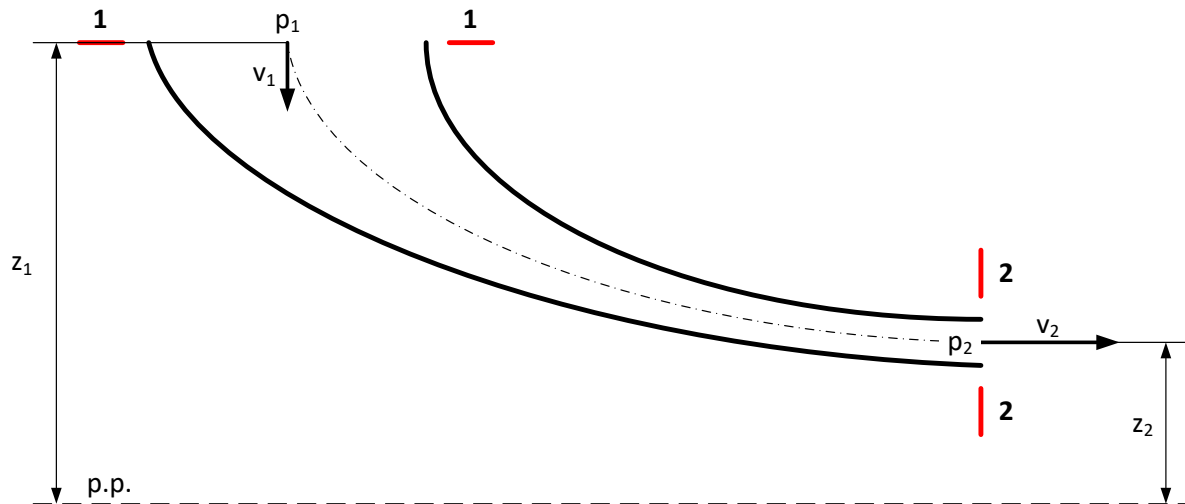
Na podstawie strumienia masy lub strumienia objętości można zdefiniować średnią prędkość przepływu  $v_{sr}$  w przekroju poprzecznym  $A$

$$v_{sr} = \frac{q_m}{\rho_{sr} A} = \frac{q_v}{A} \quad (12)$$

## 2.2. Równanie Bernoulliego

Do wyprowadzenia równania Bernoulliego założymy, że jest płyn nielepki (tzw. płyn idealny) i nieściśliwy, a przepływ jest jednowymiarowy i stacjonarny, prędkość jest stała w przekroju poprzecznym strugi.

Podobnie jak w poprzednim punkcie w przepływającej strudze wybieramy dwa przekroje poprzeczne i określamy energię. W strudze płynu można wyodrębnić 3 rodzaje energii: energię kinetyczną związaną z ruchem płynu, energię potencjalną związaną z wysokością położenia przekroju oraz energię potencjalną związaną z ciśnieniem płynu.



Rys. 2. Wybór przekrojów przepływu oraz poziomu porównawczego do równania Bernoulliego

Energia kinetyczna przepływającego płynu zgodnie z jej definicją zależy od masy płynu oraz kwadratu prędkości i wynosi

$$E_k = \frac{v^2 dm}{2} = \frac{v^2}{2} q_m dt = \frac{v^2}{2} \rho q_v dt. \quad (13)$$

W równaniu (13) elementarną masę płynu  $dm$  zastąpiono iloczynem strumienia masy  $q_m$  i czasu  $dt$ . Następnie, zgodnie z równaniem (11), strumień masy iloczynem gęstości  $\rho$  i strumienia objętości  $q_v$  ostatecznie otrzymując równanie na energię kinetyczną w postaci

$$E_k = \frac{v^2}{2} \rho q_v dt. \quad (14)$$

Energia potencjalna położenia jest równa iloczynowi masy  $dm$ , przyspieszenia ziemskiego  $g$  oraz wysokości położenia przekroju  $z$

$$E_p' = g z dm. \quad (15)$$

Podobnie jak w równaniu (13), po zastąpieniu elementarnej masy iloczynem gęstości płynu, strumienia objętości i czasu otrzymujemy

$$E_p' = g z \rho q_v dt. \quad (16)$$

Energia potencjalna ciśnienia—jest równa iloczynowi siły ciśnieniowej  $F$  i przesunięcia  $ds$  w postaci

$$E_p'' = F \cdot ds. \quad (17)$$

Korzystając z definicji siła ciśnieniowa jest iloczynem ciśnienia i pola przekroju poprzecznego  $F=pA$ , natomiast przesunięcie  $ds$  jest równe iloczynowi prędkości płynu i czasu  $ds=v \cdot dt$ . Podstawiając te wielkości do (17) otrzymamy

$$E_p'' = pA v dt \quad (18)$$

Zauważmy, że zgodnie z równaniem (8) iloczyn prędkości i pola przekroju jest równy strumieniowi objętości stąd ostatecznie otrzymujemy

$$E_p'' = p q_v dt. \quad (19)$$

Całkowita energia strugi w danym przekroju poprzecznym jest sumą wymienionych trzech rodzajów energii i nazywa się energią rozporządzalną strugi. Stąd energia całkowita strugi w przekroju 1 jest równa

$$E_{c1} = p_1 q_v dt + \frac{1}{2} \rho g q_v v_1^2 dt + \rho g q_v z_1 dt, \quad (20)$$

a w przekroju 2

$$E_{c2} = p_2 q_v dt + \frac{1}{2} \rho g q_v v_2^2 dt + \rho g q_v z_2 dt. \quad (21)$$

Na początku przyjęto założenie, że płyn jest nielepki, co oznacza, że podczas przepływu nie występują straty energii, czyli  $E_{c1}=E_{c2}$ . Porównując ze sobą prawe strony równań (20) i (21) otrzymujemy

$$p_1 q_v dt + \frac{1}{2} \rho g q_v v_1^2 dt + \rho g q_v z_1 dt = p_2 q_v dt + \frac{1}{2} \rho g q_v v_2^2 dt + \rho g q_v z_2 dt. \quad (22)$$

Po podzieleniu stronami przez  $\rho g q_v dt$  równania (22) otrzymamy

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2. \quad (23)$$

Jest to równanie Bernoulliego dla płynu idealnego. Wynika z niego, że w dowolnie wybranym przekroju poprzecznym całkowita energia strugi jest stała, czyli

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{const}. \quad (24)$$

Należy zwrócić uwagę, że wszystkie człony równania wyrażone są w jednostce długości (m) i stąd wynika ich nazewnictwo.  $\frac{p}{\rho g}$  jest to wysokość ciśnienia (statycznego),  $\frac{v^2}{2g}$  wysokość prędkości,  $z$  wysokość położenia.

Jeżeli równanie (23) lub (24) pomnożymy stronami przez  $\rho g$  to otrzymamy alternatywną postać równania Bernoulliego, w której wszystkie człony wyrażone są w jednostkach ciśnienia (Pa)

$$p_1 + \frac{v_1^2 \rho}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{v_2^2 \rho}{2} + \rho g z_2. \quad (25)$$

$$p + \frac{v^2 \rho}{2} + \rho g z = \text{const} \quad (26)$$

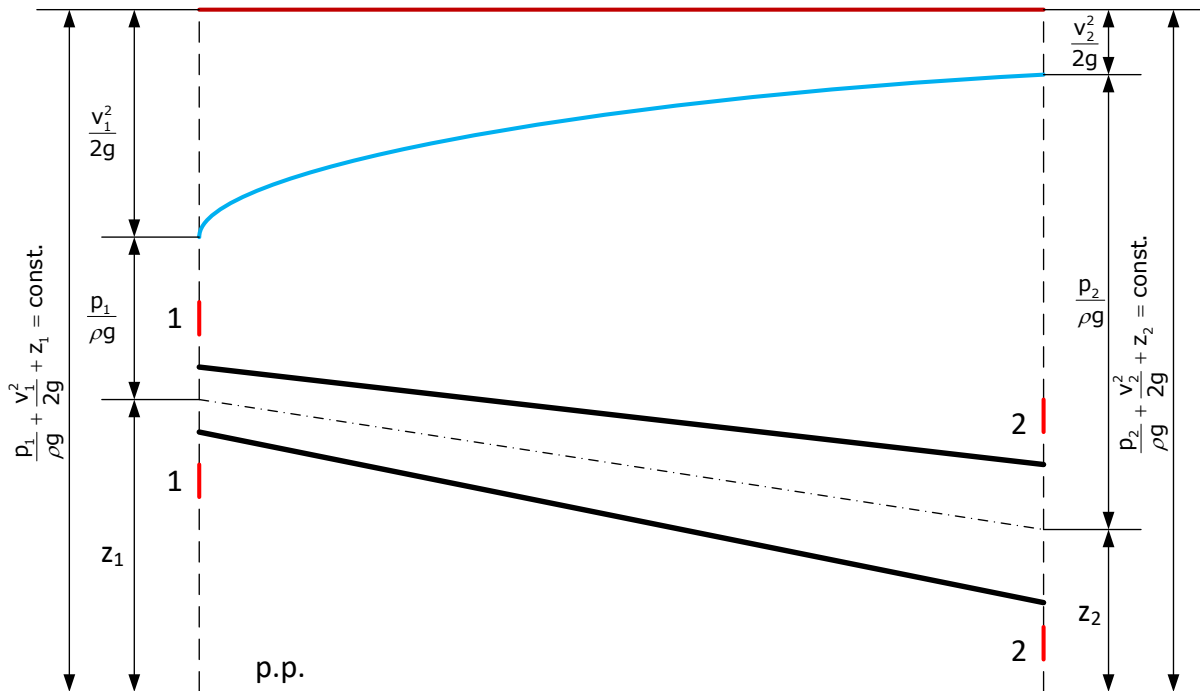
Zmianie ulegają również nazwy poszczególnych członów równania Bernoulliego,  $p$  jest ciśnieniem statycznym,  $\frac{v^2 \rho}{2}$  - ciśnieniem dynamicznym,  $\rho g z$  - wysokością położenia wyrażoną w jednostkach ciśnieniach. W przypadku, w którym na całej wysokości  $z$  występuje płyn o gęstości  $\rho$  jest to ciśnienie hydrostatyczne.

#### 2.4. Interpretacja graficzna równania Bernoulliego i równania ciągłości przepływu

Równanie ciągłości przepływu w postaci (7) i (8) umożliwia wyznaczenie średniej prędkości przepływu w dowolnym przekroju. Przy stałej wartości strumienia objętości/masy zgodnie z równaniami (5) i (6) wzrost pola przekroju przepływu skutkuje zmniejszeniem się prędkości płynu, a zmniejszenie pola przekroju przepływu zwiększeniem prędkości przepływu.

Jeżeli spojrzymy na równanie Bernoulliego (24) lub (26) wzrost prędkości przepływu powoduje obniżenie ciśnienia statycznego, natomiast zmniejszenie prędkości przepływu wzrost ciśnienia statycznego (przy niezmienniej wysokości położenia przekroju).

Na rys. 3 przedstawiono interpretację geometryczną równania Bernoulliego i równania ciągłości przepływu. Należy zauważyć, że w przypadku przepływu płynu idealnego przedstawiony na rysunku rozkład ciśnienia oraz wysokości prędkości są niezależne od kierunku przepływu.



Rys. 3. Interpretacja geometryczna równania ciągłości przepływu oraz równania Bernoulliego dla przepływu płynu idealnego.

## 2.5. Rurka Prandtla - ciśnienie całkowite, statyczne i dynamiczne

W rurce Prandtla znajdują się dwa otwory pomiarowe (rys. 4). Jeden jest ustawiony prostopadle do przepływającej strugi i służy do pomiaru ciśnienia całkowitego  $p_c$ . Ciśnienie całkowite jest sumą ciśnienia statycznego  $p_s$  oraz dynamicznego  $p_d$ . Drugi otwór ustawiony równolegle do przepływającej strugi służy do pomiaru ciśnienia statycznego  $p_s$ . Ciśnienie dynamiczne natomiast reprezentuje energię kinetyczną przepływającej strugi

$$p_d = \frac{v^2 \rho}{2}. \quad (27)$$

Jeżeli dla przykładowego układu z rys. 4, dla przekrojów A-B zastosujemy prawo naczyń połączonych to otrzymamy

$$p_A = p_s + \underbrace{\frac{v^2 \rho}{2}}_{p_d} + \rho g x + \rho g \Delta z, \quad (28)$$

$$p_B = p_s + \rho g x + \rho_m g \Delta z. \quad (29)$$

Stąd też  $p_A = p_B$

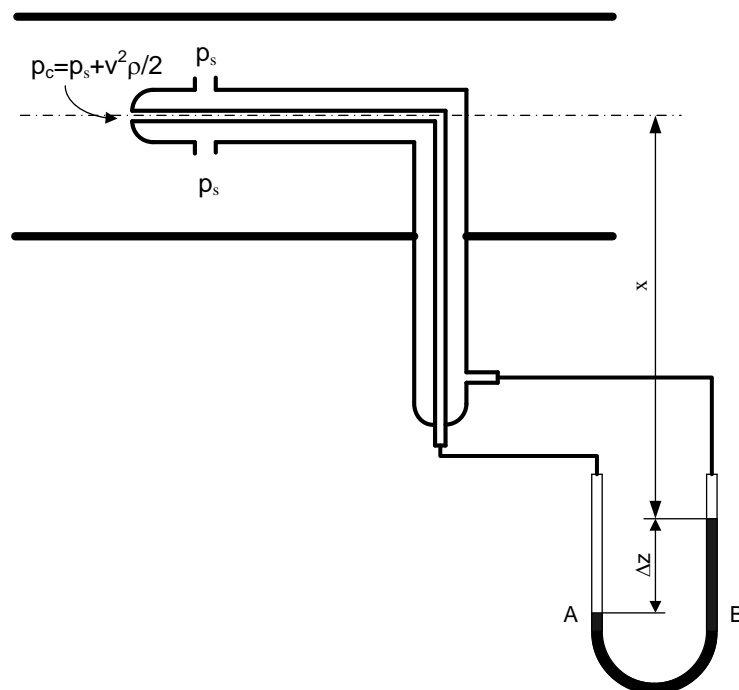


$$p_s + \frac{v^2 \rho}{2} + \rho g x + \rho g \Delta z = p_s + \rho g x + \rho_m g \Delta z. \quad (30)$$

Po uproszczeniu i rozdzieleniu członów otrzymamy z lewej strony równania ciśnienie dynamiczne, a z prawej strony wzór na różnicę ciśnień mierzonych za pomocą manometru U-rurkowego zwykłego

$$\frac{v^2 \rho}{2} = (\rho_m - \rho) g \Delta z. \quad (31)$$

Ze wzoru (31) wynika, że w układzie z rys. 4 manometr mierzy ciśnienie dynamiczne. W przypadku zmiany typu manometru (w rurce Prandtla są dwa króćce, więc musimy zastosować manometr różnicowy) wówczas w równaniu (31) zmienia się tylko jego prawa strona. Oznacza to, że rurka Prandtla zawsze mierzy ciśnienie dynamiczne, bez względu na rodzaj podłączonego manometru. Wynika to także z faktu, że jeden króciec rurki Prandtla służy do pomiaru ciśnienia całkowitego, a drugi statycznego. Należy także zauważyć, że długość  $x$  nie występuje w równaniu (31). Stąd można stwierdzić, że położenie manometru w pionie nie ma wpływu na wynik pomiaru.



Rys. 4. Układ pomiarowy z rurką Prandtla

### 3. Opis stanowiska

Stanowisko składa się następujących elementów:

- tunelu aerodynamicznego zasilanego powietrzem z wentylatorem,

- zasuwę **Z** do regulacji przepływu powietrza,
- wielokanałowego manometru cieczowego **M** ze zbiornikiem wyrównawczym **Zb**,
- zbieżno-rozbieżnego kanału,
- rurki Prandtla **Pr**
- termometru **T**.

#### 4. Procedura badawcza

Wykonanie badań polega na:

- 4.1. Zapoznaniu się z budową stanowiska i narysowaniu jego schematu z oznaczeniami urządzeń oraz wielkości mierzonych;
- 4.2. Ustawieniu za pomocą zbiornika wyrównawczego **Zb** poziomu cieczy na manometrze wielokanałowym **M** równego 100 mm.
- 4.3. Ustawieniu końca rurki Prandtla **Pr** na skali **Li** w położeniu **0**.
- 4.4. Ustawieniu zasuwę **Z** w pozycji **0**.
- 4.5. Uruchomieniu stanowiska włącznikiem **ON**.
- 4.6. Ustawieniu zasuwę **Z** w pozycji **1**.
- 4.7. Wykonaniu pomiarów wysokości ciśnienia całkowitego **h<sub>c</sub>**, ciśnienia statycznego **h<sub>s</sub>** przesuując na skali **Li** rurkę Prandtla **Pr** od pozycji 0 mm do 300 mm, z krokiem co 10 mm – notując położenie rurki Prandtla, wysokość ciśnienia całkowitego i wysokość ciśnienia statycznego.
- 4.8. Po zakończeniu pomiarów należy odczytać jednorazowo na termometrze **T** wartość temperatury, wilgotność powietrza, ciśnienie barometryczne.
- 4.9. Ustawić zasuwę **Z** w pozycji **0**.
- 4.10. Wyłączyć stanowisko włącznikiem **OFF**.

#### 5. Tabela wielkości mierzonych

Tabela wielkości pomiarowych do ćwiczenia zamieszczona jest na końcu instrukcji. Tabelę należy uzupełnić o jednostki wielkości mierzonych.

## 6. Opracowanie wyników pomiarów

Opracowanie wyników pomiarów należy wykonać zgodnie z poniższymi wytycznymi:

- 1) Obliczyć gęstość przepływającego powietrza uwzględniając ciśnienie barometryczne, temperaturę, wilgotność względną;
- 2) Dla każdego punktu pomiarowego obliczyć prędkość przepływu;
- 3) Dla każdego punktu pomiarowego przeliczyć:
  - wysokość ciśnienia całkowitego na ciśnienie całkowite, przyjmując gęstość wody (ciecz manometryczna)  $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ ;
  - wysokość ciśnienia statycznego na ciśnienie statyczne, przyjmując gęstość wody (ciecz manometryczna)  $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ ;
  - obliczyć ciśnienie dynamiczne, jako różnicę pomiędzy ciśnieniem całkowitym a ciśnieniem statycznym.
- 4) Na formularzu nr 1 (wybrać formularz uwzględniający właściwy kierunek przepływu) narysować zmierzony rozkład prędkości na długości zwężki we współrzędnych normowanych. W tym celu należy znaleźć prędkość maksymalną  $V_{\max}$  i dla każdego punktu pomiarowego obliczyć stosunek  $V/V_{\max}$ .
- 5) Na tym samym formularzu nr 1 narysować teoretyczny rozkład ciśnienia  $(V/V_{\max})_t$ . Prędkość maksymalna  $V_{\max_t}$  występuje w przewężeniu i jest związana z prędkością w każdym innym przekroju  $X$  równaniem ciągłości przepływu

$$v_{\max_t} A_p = v_x A_x, \quad (32)$$

gdzie  $A_p$  – pole przekroju przewężenia,  $A_x$  – dowolne inne pole przekroju. Przekrój jest prostokątny, stąd jeśli podstawimy za pole powierzchni iloczyn dwóch boków otrzymamy

$$v_{\max_t} a b_{\min} = v_x a b_x. \quad (33)$$

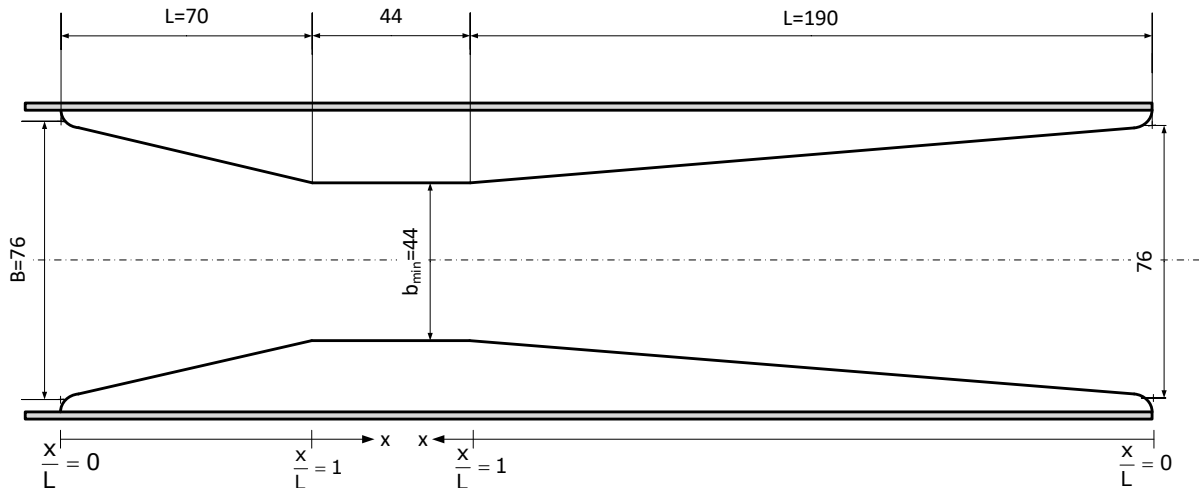
Stąd teoretyczny stosunek prędkości  $V_x/V_{\max}$  w dowolnym przekroju  $X$  jest równy

$$\frac{v_x}{v_{\max_t}} = \frac{b_{\min}}{b_x}. \quad (34)$$

Szerokość  $b_{\min}$  jest znana, natomiast  $b_x$  może zostać obliczona z funkcji liniowej uwzględniającej znane wymiary konfuzora i dyfuzora. Dla konfuzora szerokość  $b_x$  przedstawia równanie

$$b_x = B - (B - b_{\min}) \frac{x}{L}, \quad (35)$$

gdzie stosunek  $x/L$  zmienia się od 0 do 1. Dla początku konfuzora  $x/L=0$  i szerokość kanału  $b_x=B$ , dla końca konfuzora  $x/L=1$ , a szerokość  $b_x=b_{\min}$ . Natomiast przekrój w dyfuzorze można przedstawić tą samą funkcją, tylko współrzędna  $x$  będzie się zmieniać w przeciwnym kierunku (rys. 5).



Rys. 5. Zwymiarowana zwężka

6) Na formularzu nr 2 (wybrać formularz z właściwym kierunkiem przepływu) narysować zmierzony rozkład ciśnienia całkowitego, statycznego oraz dynamicznego.

## 7. Pytania kontrolne

- 1) Z jakich zasad fizyki korzysta się przy wyprowadzeniu równania ciągłości przepływu i równania Bernoulliego?
- 2) Jak wygląda równanie ciągłości przepływu dla płynu ściśliwego i nieściśliwego?
- 3) Podać definicję i jednostkę strumienia objętości i strumienia masy.
- 4) W jaki sposób zdefiniowana jest średnia prędkość przepływu?
- 5) Podać równanie Bernoulliego dla płynu idealnego, w którym człony wyrażone są w paskalach. Nazwać człony równania.
- 6) Podać równanie Bernoulliego dla płynu idealnego, w którym człony wyrażone są w metrach. Nazwać człony równania.
- 7) Wykorzystując równanie ciągłości przepływu i równanie Bernoulliego podać jak zmienia się ciśnienie i prędkość w przewodzie, gdy średnica przewodu zmniejsza się.
- 8) Wykorzystując równanie ciągłości przepływu i równanie Bernoulliego podać jak zmienia się ciśnienie i prędkość w przewodzie, gdy średnica przewodu zwiększa się.
- 9) Narysować budowę rurki Prandtla i wyjaśnić jaki rodzaj ciśnienia mierzy.

Tabela pomiarowa do L13

Data wykonania pomiarów:.....

Lp.	Li	h <sub>c</sub>	h <sub>s</sub>	Lp.	Li	h <sub>c</sub>	h <sub>s</sub>
	mm				mm	mm	
1.	0			16.	150		
2.	10			17.	160		
3.	20			18.	170		
4.	30			19.	180		
5.	40			20.	190		
6.	50			21.	200		
7.	60			22.	210		
8.	70			23.	220		
9.	80			24.	230		
10.	90			25.	240		
11.	100			26.	250		
12.	110			27.	260		
13.	120			28.	270		
14.	130			29.	280		
15.	140			30.	290		
				31.	300		

Warunki pomiaru		
Symbol	Jednostka	Wartość
p <sub>b</sub>	kPa	
φ	%	
T	°C	

Sekcja nr			
Lp.	Nazwisko	Imię	Nr albumu
1.			
2.			
3.			

Data, podpis prowadzącego

# L13: Równanie Bernoulliego oraz równanie ciągłości przepływu

## Formularz nr 1: Profil prędkości

